

Primljen / Received: 24.8.2026.

Ispravljen / Corrected: 18.9.2026.

Prihvaćen / Accepted: 26.9.2026.

Dostupno online / Available online: 10.10.2026.

Napredno nelokalno higrotermičko izvijanje FGM sendvič ploča

Autori:

Doc.dr.sc. **Idder Abdelghani**, dipl.ing.građ.

Sveučilište Ahmed Draia, Alžir

Fakultet znanosti i tehnologije

Odjel za građevinarstvo

abdelghani.idder@univ-adrar.edu.dz

Autor za korespondenciju

Doc.dr.sc. **Moulay Ali Abderrahmane**, dipl.ing.građ.

Sveučilište Ahmed Draia, Alžir

Fakultet znanosti i tehnologije

Odjel za građevinarstvo

abd.moulayali@univ-adrar.edu.dzDr.sc. **Frih Ahmed**, dipl.ing.građ.

Sveučilište Tahri Mohamed, Alžir

Odjel za građevinarstvo i hidrauliku

ahmed_frih@outlook.comDoc.dr.sc. **Abdelhak Aouadi**, dipl.ing.građ.

Sveučilište Bouira, Alžir

Fakultet primijenjenih znanosti

Odjel za građevinarstvo

a.aouadi@univ-bouira.dz

Prethodno priopćenje

Idder Abdelghani, Moulay Ali Abderrahmane, Frih Ahmed, Abdelhak Aouadi

Napredno nelokalno higrotermičko izvijanje FGM sendvič ploča

Ovo istraživanje razvija unaprijeđenu trigonometrijsku teoriju posmične deformacije u kombinaciji s Eringenovom nelokalnom elastičnošću za analizu higrotermičkog izvijanja funkcionalno gradiranih sendvič nanoskalnih ploča na Winkler-Pasternak elastičnim podlogama. Formulacija zadovoljava uvjet nultih poprečnih posmičnih naprezanja na površinama bez potrebe za korekcijskim faktorima. Analitička rješenja dobivena su primjenom Navierove metode za jednostavno oslonjene ploče izložene temperaturi i vlagom uzrokovanim gradijentima. Parametarska analiza ispituje utjecaj geometrijske vitkosti, krutosti podloge i parametra posmične funkcije q . Rezultati pokazuju vrlo dobro slaganje s referentnim rezultatima trigonometrijske teorije posmične deformacije (TSDT), s pogreškama manjim od 2 %. Predloženi pristup omogućuje učinkovito i točno predviđanje stabilnosti naprednih sendvič konstrukcija, podupirući projektiranje laganih i dugotrajnih komponenti za primjene u građevinarstvu, pomorstvu i zrakoplovstvu.

Ključne riječi:

funkcionalno gradirane sendvič ploče, higrotermičko izvijanje, unaprijeđena teorija posmične deformacije, nelokalna elastičnost, elastična podloga, Navierova metoda

Research Paper

Idder Abdelghani, Moulay Ali Abderrahmane, Frih Ahmed, Abdelhak Aouadi

Advanced nonlocal hygrothermal buckling of FGM sandwich plates

This study develops a refined trigonometric shear deformation theory combined with Eringen's nonlocal elasticity for the hygrothermal buckling analysis of functionally graded sandwich nanoscale plates on Winkler-Pasternak foundations. The formulation satisfies zero transverse shear stresses at the surfaces without correction factors. Analytical solutions are obtained using Navier's method for simply supported plates subjected to temperature and moisture gradients. Parametric studies assess the effects of geometric slenderness, foundation stiffness, and the shear function parameter q . The results agree closely with benchmark results of the trigonometric shear deformation theory (TSDT), with errors below 2%. The proposed approach enables efficient and accurate stability prediction of advanced sandwich structures, supporting the design of lightweight and durable components for civil, marine, and aerospace engineering applications.

Key words:

functionally graded sandwich plates, hygrothermal buckling, refined shear deformation theory, nonlocal elasticity, elastic foundation, Navier's method

1. Uvod

Sendvič ploče od funkcionalno gradiranih materijala (eng. *Functionally graded material* - FGM) predstavljaju visokoučinkovitu klasu kompozitnih konstrukcija u kojima se sastav materijala i njegova svojstva kontinuirano mijenjaju kroz debljinu [1]. Ova kontinuirana gradacija, koja se obično postiže prijelazom između dviju ili više konstitutivnih faza, najčešće keramike i metala, prema zadanoj zakonitosti volumenskog udjela (npr. potencijski zakon raspodjele) [2], omogućuje istodobnu optimizaciju krutosti, čvrstoće i toplinske otpornosti unutar jednog konstrukcijskog elementa [3]. Za razliku od konvencionalnih laminiranih sendvič panela, FGM materijali eliminiraju nagle međuslojne prijelaze u kojima iznenadne promjene modula elastičnosti, koeficijenta toplinskog širenja ili difuznosti vlage mogu uzrokovati diskontinuitete naprezanja, odvajanje slojeva i prerani lom [4].

U građevinarstvu se ove napredne ploče sve češće primjenjuju u laganim mostovskim kolničkim pločama [5], krovnim ljuskama [6], morskim platformama [7] i zaštitnim panelima [8], gdje moraju podnijeti kombinirano djelovanje mehaničkih i okolišnih opterećenja [9]. Higrotermička okolina, obilježena istodobnim temperaturnim gradijentima i promjenama vlage, može uzrokovati složene mehanizme deformacije [10]. Temperaturni gradijenti uzrokuju diferencijalno širenje ili skupljanje, a prodor vlage mijenja krutost i inducira bubrenje materijala [11]. Tijekom vremena cikličko higrotermičko opterećenje može smanjiti stabilnost, pomaknuti vlastite frekvencije i značajno sniziti kritična opterećenja izvijanja, zbog čega je njihovo točno predviđanje ključno za siguran i dugotrajan projekt [12].

Uvjeti oslanjanja dodatno utječu na odziv konstrukcije. Brojni praktični sustavi uključuju interakciju s elastičnim potkonstrukcijama, koje se realno mogu modelirati s pomoću troparametarske podloge: Winklerov modul za opis normalne krutosti [13–15], Pasternakov koeficijent smicanja za uzimanje u obzir poprečnog posmičnog spreznja [16, 17] te parametar prigušenja za simulaciju viskoelastičnih učinaka [18, 19]. Ovi parametri podloge snažno utječu na odnos opterećenje – progib, kritične temperature izvijanja i ponašanje nakon izvijanja te je nužno njihovo uključivanje u prediktivne modele za realne inženjerske primjene.

Tijekom posljednjih desetljeća modeliranje FGM sendvič ploča razvijalo se od klasične teorije ploča (eng. *classical plate theory* - CPT) [20] i teorije posmične deformacije prvog reda (eng. *first-order shear deformation theory* - FSDT) [21] prema teorijama posmične deformacije višeg reda (eng. *higher-order shear deformation theories* - HSDT) [22] i pristupima ekvivalentnog jednoslojnog modela (eng. *equivalent single-layer* - ESL) [23]. HSDT teorije omogućuju realističan prikaz raspodjele poprečnih posmičnih naprezanja kroz debljinu bez potrebe za empirijskim korekcijskim faktorima smicanja [24–29], no često zahtijevaju velik broj varijabli i složene upravljačke izraze – osobito u higrotermoelastičnim problemima na elastičnim podlogama – što ograničava njihovu rutinsku primjenu u inženjerskoj praksi. Numerički pristupi poput metode konačnih elemenata (FEM) [30] i metode diferencijalne

kvadrature (eng. *differential quadrature method* - DQM) [31] mogu obuhvatiti te složenosti, ali uz visoke računalne troškove, osobito u opsežnim parametarskim analizama [32].

U inženjerskoj praksi funkcionalno gradirane (eng. *functionally graded* - FG) sendvič ploče sve se češće koriste u elementima poput fasadnih panela, laganih krovova, podnih konstrukcija i sustava obloga, gdje varijacije temperature i vlage mogu značajno utjecati na njihov mehanički odziv. Iako postojeći modeli ploča pružaju vrijedne alate za analizu takvih konstrukcija, i dalje postoji potreba za formulacijama koje dosljedno uključuju higrotermičke učinke, gradaciju materijala, nelokalno ponašanje i utjecaj elastičnih podloga. Uključivanje učinaka elastične podloge omogućuje realističniji prikaz interakcije između ploče i nosivog medija, kao što su tlo, izolacijski slojevi ili potkonstrukcije. Time se poboljšava predviđanje progiba, vibracija i ukupne stabilnosti. To je osobito važno u građevinarstvu, gdje uzimanje u obzir deformabilnosti podloge može unaprijediti projektiranje podnih sustava, mostovskih kolničkih ploča i fasadnih panela, ograničavajući prekomjerne deformacije i osiguravajući sigurnost i uporabljivost konstrukcija pod radnim opterećenjima.

Nedavna istraživanja dodatno su unaprijedila modeliranje FG i FGM sendvič nanoploča pod utjecajem spregnutih higrotermičkih i mehaničkih djelovanja. Benachi i sur. [33] proučavali su elastičnu nestabilnost funkcionalno gradiranih sendvič nanoploča pod higrotermo-mehaničkim opterećenjem koristeći kvazi-3D teoriju posmične deformacije s pet varijabli u kombinaciji s Eringenovom nelokalnom elastičnošću i dvoparametarskom elastičnom podlogom. Zaitoun i sur. [34] istraživali su higrotermičko izvijanje FG sendvič ploča na visko-Pasternakovoj podlozi primjenom teorije posmične deformacije višeg reda s četirima nepoznanicama i viskoelastičnim prigušnim članom. Novije, Refrafi i sur. [35] analizirali su higrotermo-mehaničko izvijanje FG sendvič ploča na Winkler-Pasternak podlogama koristeći se modelom posmične deformacije koji zadovoljava uvjet nultih poprečnih posmičnih naprezanja bez potrebe za korekcijskim faktorima. Iako ovi radovi predstavljaju značajan doprinos, uglavnom se oslanjaju na složene kvazi-3D teorije, integralne članove ili unaprijed definirane posmične funkcije. Nasuprot tome, ovo istraživanje koristi novopredloženu trigonometrijsku funkciju oblika s podesivim parametrom q , integrira nelokalnu elastičnost unutar jedinstvene higrotermičke formulacije te izvodi učinkovito zatvoreno analitičko rješenje tipa Navierove metode za FG sendvič ploče na Winkler-Pasternak podlogama.

Kako bi se odgovorilo na navedene izazove, u ovom radu razvijena je unaprijeđena četverovarijabilna trigonometrijska teorija posmične deformacije (eng. *trigonometric shear deformation theory* - TSDT) integrirana s Eringenovom nelokalnom elastičnošću unutar jedinstvene higrotermičke formulacije. Usvojena posmična funkcija inherentno zadovoljava uvjet slobodnih poprečnih posmičnih naprezanja na površinama, a upravljački su izrazi izvedeni primjenom principa virtualnog rada i analitički riješene Navierovom metodom za jednostavno oslonjene ploče. Za razliku od prethodnih radova, predložena formulacija uvodi novu trigonometrijsku posmičnu funkciju koja eliminira potrebu

za korekcijskim faktorima smicanja, uključuje nelokalne učinke mjerila relevantne za nanoskalne strukture te pruža potpuno spregnuti higrotermički model koji istodobno uzima u obzir gradijente temperature i vlage. Nadalje, za razliku od numeričkih pristupa ili modela posmične deformacije višeg reda s velikim brojem kinematičkih varijabli, predloženo analitičko rješenje tipa Navierove metode postiže visoku točnost uz znatno manji računalni napor. Uključivanje učinaka Winklerove i Pasternakove podloge unutar nelokalnog higrotermičkog okvira, što se rijetko istodobno razmatra u ranijim istraživanjima, dodatno izdvaja ovaj rad.

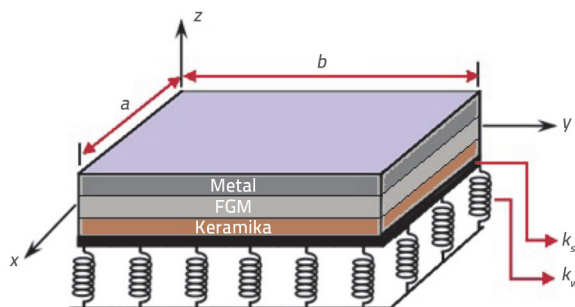
Validacija u odnosu na referentna TSDT rješenja [36] potvrđuje točnost predložene formulacije, uz postizanje preciznih rezultata uz znatno smanjeni računalni napor. Ovaj sveobuhvatni okvir stoga pruža rigoroznu i učinkovitu osnovu za analizu FG sendvič ploča pod kombiniranim mehaničkim, toplinskim i higroskopskim opterećenjima te donosi nova saznanja o njihovom ponašanju u zahtjevnim građevinskim uvjetima.

2. Okvir predložene teorije

Točno modeliranje FGM sendvič ploča pod higrotermičkim utjecajima zahtijeva formulaciju koja istodobno obuhvaća gradaciju materijala, okolišna opterećenja i interakciju s podlogom [37]. Mehanički odziv snažno je određen promjenom modula elastičnosti, toplinskog širenja i koeficijenata vlage kroz debljinu, kao i sprežanjem između savijanja, istezanja i posmične deformacije [38]. U ovom radu navedeni utjecaji uključeni su u okviru kontinuumske teorije ploča, pri čemu su kinematičko polje, konstitutivne relacije i komponente higrotermičkih deformacija dosljedno definirane kako bi odražavale gradirani karakter materijala i reakciju elastične podloge.

2.1. Kinematički i konstitutivni izrazi

Razmatra se pravokutna funkcionalno gradirana (FGM) sendvič ploča duljine a , širine b i ukupne debljine h , definirana u Kartezijevom koordinatnom sustavu (x, y, z) sa srednjom ravninom u $z = 0$, kako je prikazano na slici 1.



Slika 1. Geometrija i konfiguracija materijala metalno-FGM-keramičke sendvič ploče koja počiva na Winkler-Pasternakovoj elastičnoj podlozi (FGM - funkcionalno gradirani materijali)

Ploča se sastoji od dviju homogenih obložnih ploča (vanjskog sloja) i jezgre izrađene od funkcionalno gradiranog materijala, u kojoj se svojstva kontinuirano mijenjaju kroz debljinu prema potencijskom (*power-law*) zakonu raspodjele.

Varijacija općeg materijalnog svojstva $P_{(i)}(z)$, kao što su Youngov modul elastičnosti E , Poissonov koeficijent ν , koeficijent toplinskog širenja α , ili koeficijent širenja uslijed vlage β , dana je u izrazu (1):

$$P_{(i)}(z) = P_m - P_{cm} V_{(i)}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1)$$

Izraz (1) dobiven je primjenom Voigtove sheme homogenizacije (pravilo mješavina) [39, 40], koja pretpostavlja stanje jednolikog deformiranja (*iso-strain*) kroz debljinu i savršeno prijanjanje između keramičke i metalne faze. Efektivno svojstvo $P_{(i)}(z)$ stoga se računa kao linearna kombinacija svojstava konstitutivnih faza ponderirana njihovim volumnim udjelima.

Tijekom formulacije, indeks i označava sloj, pri čemu $i = 1$ odgovara gornjem obložnom sloju (metal), $i = 2$ FGM jezgri, a $i = 3$ donjem obložnom sloju (keramika). Materijalna svojstva $P_{(i)}(z)$ definirana su za svaki sloj prema njegovom sastavu i zakonitosti raspodjele kroz debljinu.

U izrazu (1), P_m i P_c predstavljaju vrijednosti svojstava faza bogatih metalom, odnosno keramikom, pri čemu vrijedi:

$$P_{cm} = P_m - P_c \quad (2)$$

Raspodjela volumnog udjela ovisi o tipu sloja. Za dva homogena obložna sloja ($i = 1$ i $i = 3$), sastav materijala konstantan je kroz debljinu, pri čemu je volumni udio primarne faze jednak jedinici ($V_1 = 0$ za gornji sloj, $V_3 = 1$ za donji sloj). Za FGM jezgru ($i = 2$), funkcionalno gradirana jezgra osigurava glatki prijelaz mehaničkih i toplinskih svojstava, čime se učinkovito smanjuju koncentracije naprezanja na sučeljima. Sastav materijala slijedi kontinuiranu potencijsku raspodjelu u smjeru debljine z , koja se izražava kao:

$$\begin{cases} V_1 = 0 & \text{za } -1/2 \leq \bar{z} \leq H_1 \\ V_2 = \left(\frac{\bar{z} - H_1}{H_2 - H_1} \right)^r & \text{za } H_1 \leq \bar{z} \leq H_2 \\ V_3 = 1 & \text{za } H_1 \leq \bar{z} \leq 1/2 \end{cases} \quad (3)$$

gdje indeks r je pozitivni indeks gradijenta materijala ($r > 0$) koji upravlja promjenom svojstava materijala po debljini ploče. Bezdimenzijska koordinata $\bar{z}$ definira se kao omjer koordinate debljine z i ukupne debljine ploče h ($\bar{z} = z/h$). Slično tome, H_j označava normaliziranu debljinu j -tog sloja, izraženu kao $H_j = h_j/h$, gdje je h_j fizička debljina tog sloja.

Polje pomaka definirano je prema unaprijedenoj teoriji posmične deformacije s četiri varijable, kao što je dato u izrazu (4):

$$\begin{aligned}
u(x, y, z, t) &= u_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial x} + k_1 f(z) \int \theta(x, y, t) dx \\
v(x, y, z, t) &= v_0(x, y, t) - z \frac{\partial w_0(x, y, t)}{\partial y} + k_2 f(z) \int \theta(x, y, t) dy \\
w(x, y, z, t) &= w_0(x, y, t)
\end{aligned} \quad (4)$$

gdje su u_0, v_0, w_0 pomaci srednje ravnine, θ je posmična komponenta poprečnog pomaka, a $f(z)$ je trigonometrijska posmična funkcija koja osigurava nulta poprečna posmična naprezanja pri $z = \pm h/2$.

Ključna novost ove formulacije leži u primjeni novopredložene trigonometrijske poprečne posmične funkcije, posebno oblikovane kako bi zadovoljila osnovni fizikalni uvjet iščezavanja poprečnih posmičnih naprezanja na gornjoj i donjoj površini sendvič ploče. Ovo poboljšanje osigurava da je raspodjela posmičnih naprezanja u skladu s trodimenzionalnom teorijom elastičnosti, čime se povećava točnost bez potrebe za korekcijskim faktorima smicanja. U predloženoj teoriji funkcija oblika $f(z)$ definirana je kao:

$$f(z) = \sin\left(\frac{2q\pi z}{h}\right) - \frac{2q\pi z}{h} \cos(qh); \quad g(z) = \frac{df(z)}{dz} \quad (5)$$

Predložena funkcija oblika prethodno je primijenjena za procjenu savojnog ponašanja FGM ploča pod djelomičnim (lokalnim) opterećenjem [41]; međutim, prema saznanjima autora, još nije korištena za analizu odziva FGM materijala u uvjetima higrotermičkog opterećenja unutar okvira teorije nelokalne elastičnosti.

U primijenjenoj unaprijeđenoj teoriji posmične deformacije parametar q pojavljuje se u funkciji oblika $f(z)$ ovisnoj o debljini i upravlja zakrivljenošću raspodjele poprečne posmične deformacije kroz debljinu ploče. Fizikalno gledano, q određuje koliko brzo se posmična naprezanja mijenjaju od srednje ravnine prema gornjoj i donjoj površini, osiguravajući zadovoljenje rubnih uvjeta slobodnih naprezanja na vanjskim plohama sendvič ploče. Niže vrijednosti parametra q daju glađu posmičnu raspodjelu sličnu paraboli, a veće vrijednosti dovode do izraženije lokalizacije posmičnih naprezanja u blizini međuslojeva [42]. Budući da stvarna posmična raspodjela kroz debljinu općenito nije poznata, analizirano je više vrijednosti parametra q (konkretno $q = 5, 7, i 9$). Ova parametarska analiza omogućuje određivanje vrijednosti parametra q koja daje rezultate najbliže referentnim rješenjima iz literature za FG sendvič ploče. Nulte komponente deformacija dane su izrazom:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \varepsilon_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^1 \\ \varepsilon_y^1 \\ \varepsilon_{xy}^1 \end{Bmatrix} + f(z) \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^2 \\ \varepsilon_y^2 \\ \varepsilon_{xy}^2 \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = g(z) \begin{Bmatrix} \gamma_{xz}^0 \\ \gamma_{yz}^0 \end{Bmatrix} \quad (6)$$

Eringenova teorija nelokalne elastičnosti proširuje okvir klasične (lokalne) mehanike kontinuuma uključivanjem utjecaja

dugodosežnih međuatomskih sila u konstitutivne relacije [43]. U ovom modelu naprezanje u određenoj točki materijala nije određeno isključivo deformacijom u toj točki, već je pod utjecajem i polja deformacija unutar konačnog prostornog područja. To se postiže uvođenjem materijalnog parametra karakteristične duljine u konstitutivne jednačbe, kojim se opisuju efekti ovisni o veličini, a koji postaju značajni na mikro- i nanoskali [44]. Prema Eringenovoj linearnoj teoriji elastičnosti za sendvič-nanoploče [45], relacije naprezanje - deformacija mogu se izraziti u sljedećem obliku [46]:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} - \mu^2 \nabla^2 \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x - \alpha \Delta T - \beta \Delta C \\ \varepsilon_y - \alpha \Delta T - \beta \Delta C \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (7)$$

gdje ∇^2 predstavlja Laplaceov operator, koji opisuje zbroj drugih parcijalnih derivacija s obzirom na koordinate u ravnini x i y , i:

$$C_{11} = C_{22} = \frac{E(z)}{1-\nu^2}; \quad C_{12} = \frac{\nu E(z)}{1-\nu^2}; \quad C_{66} = C_{44} = C_{55} = \frac{E(z)}{2(1+\nu)} \quad (8)$$

Prostorna raspodjela promjena temperature i vlage po debljini ploče dana je izrazom:

$$\Delta T = T - T_0; \quad \Delta C = C - C_0 \quad (9)$$

2.2. Upravljački izrazi higrotermoelastičnog sendvič sustava

Kako bi se obuhvatilo spregnuto mehaničko i higrotermičko ponašanje FGM sendvič ploče, upravljačkog izraza gibanja izvode se primjenom principa virtualnog rada. Ovaj princip, koji izjednačava unutarnju deformacijsku energiju s vanjskim radom djelujućih opterećenja i okolišnih utjecaja za sve dopuštene virtualne pomake, može se analitički izraziti kao:

$$\int_0^t (\delta U + \delta V - \delta K) dt = 0 \quad (10)$$

gdje δU označava varijaciju deformacijske energije, δK varijaciju kinetičke energije, a varijaciju vanjskog rada povezanog s gustoćom reakcijske sile podloge.

Varijacija deformacijske energije za FGM sendvič ploču izražava se kao:

$$\begin{aligned}
\delta U &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_A [\sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}] dA dz \\
&= \int_A [N_x \delta \varepsilon_x^0 + N_y \delta \varepsilon_y^0 + N_{xy} \delta \gamma_{xy}^0 + M_x^b \delta k_x^b + M_y^b \delta k_y^b + M_{xy}^b \delta k_{xy}^b + \\
&\quad + M_x^s \delta k_x^s + M_y^s \delta k_y^s + M_{xy}^s \delta k_{xy}^s + S_{yz}^s \delta \gamma_{yz} + S_{xz}^s \delta \gamma_{xz}] dA = 0
\end{aligned} \quad (11)$$

gdje A označava površinu srednje ravnine ploče, a rezultantne sile naprezanja N , M , i S , predstavljaju redom ravninske sile, momente savijanja i poprečne posmične sile, definirane kao:

$$\begin{Bmatrix} N_x & N_y & N_{xy} \\ M_x^b & M_y^b & M_{xy}^b \\ M_x^s & M_y^s & M_{xy}^s \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) \begin{Bmatrix} 1 \\ z \\ f(z) \end{Bmatrix} dz \quad (12)$$

$$(S_{xy}, S_{yz}) = \int_{-h/2}^{h/2} (\tau_{xz}, \tau_{xy}) g(z) dz$$

Promjena vanjskog rada zbog gustoće reakcijske sile elastične podloge izražava se kao:

$$\delta V = \int_{-h/2}^{h/2} \int_A f_e \delta w dA dz \quad (13)$$

gdje f_e označava gustoću reakcijske sile podloge koja djeluje protiv poprečnog pomaka

$$f_e = K_w w(x, y) - K_s \tilde{\nabla}^2 w(x, y) \quad (14)$$

pri čemu k_w [N/m³] predstavlja Winklerov modul (normalnu krutost), a k_s [N/m] Pasternakov koeficijent smicanja, koji uzima u obzir poprečnu posmičnu interakciju u mediju podloge [47], gdje:

$$K_w = \frac{K_w a^4}{D_c}, \quad K_s = \frac{K_w a^2}{D_c}, \quad D_c = \frac{E_c h^3}{12(1-\nu^2)} \quad (15)$$

U ovom izrazu K_w i K_s su parametri krutosti podloge u Pasternakovom modelu. Konkretno, K_w predstavlja Winklerovu (normalnu) krutost, koja opisuje vertikalnu reakciju proporcionalnu lokalnom progibu $w(x, y)$, a K_s označava krutost posmičnog sloja, koja modelira posmičnu interakciju podloge i djeluje na Laplaceov operator $\nabla^2 w(x, y)$.

Provođenjem parcijalne integracije na izrazu (10) dobivaju se diferencijalni upravljački izrazi koji opisuju higrotermoelastični odziv FGM sendvič ploče:

$$\begin{cases} \delta u_0: \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \\ \delta v_0: \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \\ \delta w_b: \frac{\partial^2 M_x^b}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y^b}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}^b}{\partial x \partial y} - K_w w_0 + K_s \nabla^2 w_0 = 0 \\ \delta \theta: -k_1 A \frac{\partial^2 M_x^s}{\partial x^2} - k_2 B \frac{\partial^2 M_y^s}{\partial y^2} - (k_1 A' + k_2 B') \frac{\partial^2 M_{xy}^s}{\partial x \partial y} + k_1 A' \frac{\partial S_{xz}}{\partial x} + k_2 B' \frac{\partial S_{yz}}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (16)$$

uzimajući u obzir da:

$$A' = -\frac{1}{\alpha^2}, \quad B' = -\frac{1}{\beta^2}, \quad k_1 = \alpha^2, \quad k_2 = \beta^2 \quad (17)$$

U ovoj formulaciji pretpostavlja se da su primijenjena temperatura T i koncentracija vlage C konstantne duž ravnine (x, y) i da se mijenjaju samo duž smjera debljine FG sendvič ploče, kako je definirano s:

$$K(z) = \Delta K \left(z + \frac{1}{2} \right)^p + k_b, \quad K = T, C \quad (18)$$

Gdje je $K = T, C$, a T predstavlja utjecaj temperature, a C utjecaj vlage.

Uvrštavanjem izraza (7) u izraz (12) rezultante naprezanja FGM sendvič ploče izražavaju se u terminima generaliziranih komponenti deformacije kao [48]:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M^b \\ M^s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [A] & [B] & [B^s] \\ [B] & [D] & [D^s] \\ [B^s] & [D^s] & [H^s] \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ \varepsilon^{21} \\ \varepsilon^2 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N^T \\ M^{bT} \\ M^{sT} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} N^C \\ M^{bC} \\ M^{sC} \end{Bmatrix} \quad (19)$$

gdje je

$$\begin{Bmatrix} [A] & [B] & [B^s] \\ [B] & [D] & [D^s] \\ [B^s] & [D^s] & [H^s] \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & B_{11} & B_{12} & 0 & B_{11}^s & B_{12}^s & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 & B_{12} & A_{22} & 0 & B_{12}^s & B_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} & 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & B_{66}^s \\ B_{11} & B_{12} & B_{11} & B_{12} & B_{11} & B_{12} & B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{12} & B_{22} & B_{12} & B_{22} & B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} & 0 & 0 & D_{66} & 0 & 0 & D_{66}^s \\ B_{11}^s & B_{12}^s & 0 & D_{11}^s & D_{12}^s & 0 & H_{11}^s & H_{12}^s & 0 \\ B_{12}^s & B_{22}^s & 0 & D_{12}^s & D_{22}^s & 0 & H_{12}^s & H_{22}^s & 0 \\ 0 & 0 & B_{22}^s & 0 & 0 & D_{66}^s & 0 & 0 & H_{66}^s \end{bmatrix} \quad (20)$$

i

$$\begin{aligned} \varepsilon^0 &= \{\varepsilon_x^0, \varepsilon_y^0, \varepsilon_{xy}^0\}, \varepsilon^1 = \{\varepsilon_x^1, \varepsilon_y^1, \varepsilon_{xy}^1\}, \varepsilon^2 = \{\varepsilon_x^2, \varepsilon_y^2, \varepsilon_{xy}^2\} \\ N &= \{N_{11}, N_{22}, N_{12}\}, M^b = \{M_{11}^b, M_{22}^b, M_{12}^b\}, M^s = \{M_{11}^s, M_{22}^s, M_{12}^s\} \\ N^k &= \{N_{11}^k, N_{22}^k, 0\}, M^{bk} = \{M_{11}^{bk}, M_{22}^{bk}, 0\}, M^{sk} = \{M_{11}^{sk}, M_{22}^{sk}, 0\}, k = T, C \end{aligned} \quad (21)$$

Odgovarajuće komponente krutosti definirane su kao:

$$\begin{aligned} (A_{ij}, A_{ij}^s, B_{ij}, B_{ij}^s, D_{ij}, D_{ij}^s, H_{ij}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, g(z)^2, z, f(z), z^2, z f(z), f(z)^2) C_{ij} dz \\ A_{ij}^s &= \int_{-h/2}^{h/2} C_{ij} [g(z)]^2 dz, \quad (i, j = 4, 5) \end{aligned} \quad (22)$$

Za komponente higrotermičke krutosti:

$$\begin{aligned} \{N_{11}^T, M_{11}^{bT}, M_{11}^{sT}\} &= -\sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \Xi^{(i)} \Delta T \{1, z, f(z)\} dz, \\ \{N_{11}^C, M_{11}^{bC}, M_{11}^{sC}\} &= -\sum_{i=1}^3 \int_{h_{i-1}}^{h_i} \Upsilon^{(i)} \Delta C \{1, z, f(z)\} dz, \end{aligned} \quad (23)$$

uzimajući u obzir da:

$$N_{11}^k = N_{22}^k, \quad M_{11}^{bk} = M_{22}^{bk}, \quad M_{11}^{sk} = M_{22}^{sk}, \quad k = T, C \quad (24)$$

$$\Xi^{(i)} = \frac{E^{(i)} \alpha^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}}, \gamma^{(i)} = \frac{E^{(i)} \beta^{(i)}}{1 - \nu^{(i)}}, \quad k = T, C \quad (25)$$

2.3. Predloženo rješenje sustava

Analitička rješenja za higrotermički dinamički odziv i izvijanje jednostavno oslonjenih FG sendvič ploča dobivena su primjenom Navierove metode. U ovom pristupu komponente pomaka razvijaju se u dvostruke trigonometrijske (Fourierove) redove s nepoznatim koeficijentima, pri čemu su trigonometrijske funkcije odabrane tako da inherentno zadovoljavaju rubne uvjete jednostavnog oslanjanja. Sukladno tome, pomaci se izražavaju kao:

$$\begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \\ \theta \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \begin{Bmatrix} U_{mn} \cos(\mu x) \sin(\eta y) \\ V_{mn} \sin(\mu x) \cos(\eta y) \\ W_{mn} \sin(\mu x) \cos(\eta y) \\ X_{mn} \sin(\mu x) \cos(\eta y) \end{Bmatrix} \quad (26)$$

gdje U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} i X_{mn} označavaju nepoznate Fourierove koeficijente, a u obzir se uzima da je $\mu = m\pi/a$ i $\eta = n\pi/b$, pri čemu m i n predstavljaju odgovarajuće modove u smjeru x i y . Iako detaljna analiza konvergencije nadilazi opseg ovog rada, numerička stabilnost Navierovog dvostrukog Fourierovog reda osigurana je odabirom dovoljno velikog broja članova. U literaturi je dobro poznato da Navierova rješenja za ploče i sendvič konstrukcije obično konvergiraju za $n \leq 60 - 100$ [49–52]. U ovom istraživanju korišten je broj članova $n = 201$ u svim proračunima. Povećanje broja članova iznad te vrijednosti ne uzrokuje vidljive promjene u strukturnom odzivu, što potvrđuje da odabrani red trunciranja osigurava numerički stabilne i potpuno konvergirane rezultate za promatrane veličine. Uvrštavanjem izraza (14) u izraze (10) i (11) dobivaju se izrazi gibanja FG sendvič ploče u funkciji nepoznanica U_{mn} , V_{mn} , W_{mn} i X_{mn} , kako slijedi:

$$\det \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} + k & S_{34} \\ S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} \end{bmatrix} = 0 \quad (27)$$

U izrazu (27), oznaka "det" predstavlja determinantu matrice krutosti. Postavljanjem ove determinante jednakom nuli dobivaju se netrivialna rješenja, koja odgovaraju karakterističnom izrazu za određivanje kritičnih opterećenja izvijanja FG sendvič ploče.

3. Rezultati i rasprava

Predložena unaprijeđena trigonometrijska teorija posmične deformacije, u kombinaciji s Eringenovom nelokalnom

elastičnošću, primijenjena je za procjenu higrotermičkog izvijanja jednostavno oslonjenih FGM sendvič nanoploča na Winkler-Pasternakovim elastičnim podlogama. Ako nije drukčije navedeno, razmatrana konfiguracija ploče ima omjer debljine jezgre i obložnih slojeva $r = p = 1$, keramičko-metalnu gradaciju u FGM jezgri određenu potencijalnim indeksom n te materijalna svojstva navedena u tablici 1. Svi rezultati prikazani su u bezdimenzijskom obliku kako bi se omogućila usporedba s referentnim rješenjima iz literature. Parametarska analiza ispituje utjecaj gradijentnog indeksa, parametara krutosti podloge (k_w , k_s), parametra posmične funkcije q , omjera vitkosti (a/h) te higrotermičkog opterećenja na kritičnu temperaturu izvijanja ΔT_{cr} . Učinkovitost predloženog modela procijenjena je usporedbom s teorijom posmične deformacije trećeg reda (TSDT), pri čemu je pokazana točnost unutar 2 % za sve analizirane slučajeve.

Tablica 1. Karakteristike sastavnih materijala FGM-a

	E [GPa]	ν	α_c ($1/^\circ\text{C}$)	β_c ($\text{wt \% H}_2\text{O}$) $^{-1}$
Metal (aluminij)	380	0,3	$7 \cdot 10^{-6}$	0,001
Keramika (aluminijev oksid)	70	0,3	$23 \cdot 10^{-6}$	0,44

U nastavku se istražuju higrotermički dinamički odziv i stabilnost jednostavno oslonjenih FG sendvič ploča primjenom novo razvijene unaprijeđene teorije posmične deformacije s četirima varijablama. Ova formulacija koristi trigonometrijsku poprečnu posmičnu funkciju koja inherentno zadovoljava uvjet nultih posmičnih naprezanja na površinama ploče, čime se eliminira potreba za empirijskim korekcijskim faktorima smicanja i poboljšava točnost spregnutih higrotermičkih predviđanja.

U ovom radu higrotermički učinci uvedeni su prema formulaciji korištenoj u referentnom radu Hellala i sur. [36], pri čemu se temperaturna i vlažna polja definiraju zadanim razlikama kroz debljinu ploče. Temperaturno polje definirano je jednolikim porastom temperature u odnosu na referentnu temperaturu T_0 . Za sve numeričke simulacije primijenjena je temperaturna razlika $\Delta T = 50^\circ\text{C}$, odnosno $T_b - T_0 = 50^\circ\text{C}$.

Učinci vlage uvedeni su putem razlike koncentracije vlage $\Delta C = C_b - C_0$. Razmatrana su dva slučaja vlage kako bi se opisali niski i visoki higrički uvjeti opterećenja: $\Delta C = 0,1\%$ i 10% . Ove vrijednosti odgovaraju malim i značajnim promjenama vlažnosti koje se tipično javljaju u višeslojnim kompozitnim pločama izloženima higrotermičkom opterećenju [53–58].

FG sendvič struktura sastoji se od slojeva aluminijevog oksida (keramika) i aluminija (metal), pri čemu su materijalna svojstva kontinuirano gradirana kroz debljinu prema zadanoj zakonitosti volumenskog udjela, čime se omogućuje glatki prijelaz mehaničkih i toplinskih svojstava.

Bezdimenzijski parametar kritične temperature izvijanja korišten u ovoj analizi definiran je kako slijedi:

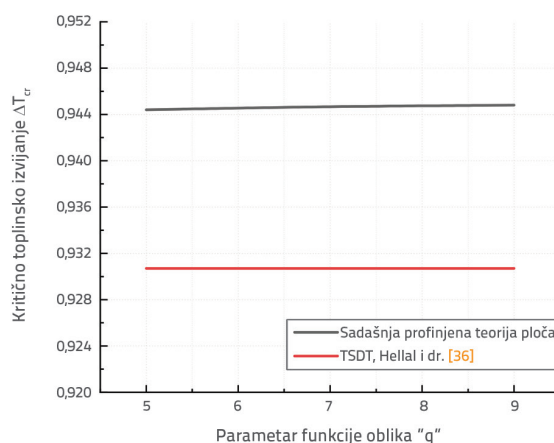
$$\Delta T_{cr} = 10^2 \alpha_c \Delta T \quad (28)$$

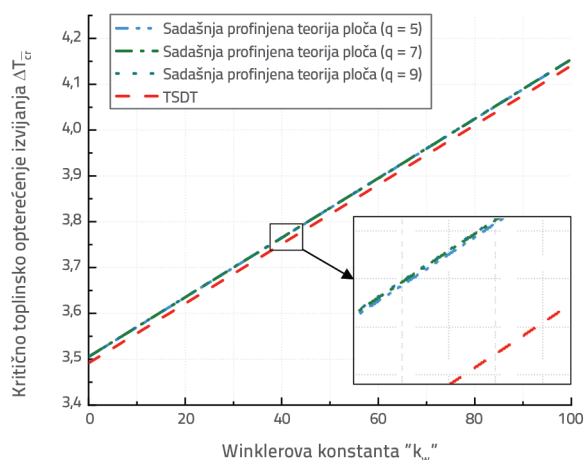
Tablica 2. Kritično toplinsko izvijanje ΔT_{cr} kvadratne FG sendvič ploče (I-I-I) ($r = p = 1$, $\Delta C = 10\%$, $a = b$) u higrotermičkom okruženju

(k_w, k_s)	a/h	Kritično toplinsko izvijanje ΔT_{cr}			
		q = 5	q = 7	q = 9	TSDT [24]
(0, 0)	4	5,4844	5,4941	5,4972	5,0828
	10	0,9444	0,9447	0,9448	0,9307
	15	0,4043	0,4044	0,4044	0,4016
	20	0,2123	0,2123	0,2123	0,2114
(0, 20)	4	21,4899	21,4996	21,5028	21,0884
	10	3,5053	3,5056	3,5057	3,4916
	15	1,5425	1,5426	1,5426	1,5397
	20	0,8525	0,8525	0,8525	0,8516
(20, 20)	4	22,3008	22,3105	22,3137	21,8992
	10	3,635	3,6353	3,6354	3,6214
	15	1,6002	1,6002	1,6003	1,5974
	20	0,8849	0,885	0,885	0,884
(100, 20)	4	25,5442	25,5539	25,5571	25,1427
	10	4,1539	4,1543	4,1544	4,1403
	15	1,8308	1,8309	1,8309	1,828
	20	1,0147	1,0147	1,0147	1,0138

Kako bi se procijenila točnost predloženog modela trigonometrijske posmične funkcije prema Kumaru (2019) [41], provedena je validacijska analiza koristeći referentne rezultate dobivene teorijom posmične deformacije trećeg reda (TSDT) koje su prikazali Hellal i sur. (2019) [36]. Validacija je usmjerena na predviđanje poprečnih progiba i kritičnih parametara toplinskog izvijanja FG sendvič ploča izloženih kombiniranim higrotermičkim učincima. Konkretno, razmatran je slučaj izvijanja sendvič ploče na Winkler–Pasternak elastičnoj podlozi pod djelovanjem temperaturnog opterećenja koje se linearno mijenja kroz debljinu. Dobiveni rezultati uspoređeni su s rezultatima TSDT pristupa [36], čime je omogućena izravna procjena točnosti i pouzdanosti modela u analizi toplinskog izvijanja u higrotermičkom okruženju. Kao što je prikazano u tablici 2., numerički rezultati dobiveni primjenom predloženog unaprijeđenog modela posmične deformacije pokazuju vrlo dobro slaganje s referentnim rješenjima Hellal i sur. (2019) [36], temeljenima na teoriji posmične deformacije trećeg reda (TSDT). Analiza obuhvaća poprečni progib kvadratnih FGM sendvič ploča pod kombiniranim higrotermičkim opterećenjem za različite vrijednosti parametra trigonometrijske posmične funkcije q . Usporedba pokazuje da predloženi model vrlo vjerno reproducira TSDT rezultate, uz relativne pogreške dosljedno manje od 2 % za $q = 9$. Ovaj optimalni raspon konvergencije potvrđuje da predložena trigonometrijska posmična funkcija točno opisuje nelinearnu raspodjelu poprečnih posmičnih naprezanja kroz debljinu, uz istovremeno obuhvaćanje spregnutih učinaka uzrokovanih temperaturnim i vlažnim gradijentima. Takva razina preciznosti ključna je za pouzdano predviđanje higrotermičkog izvijanja naprednih FGM sendvič konstrukcija na elastičnim podlogama.

Na slici 2. prikazan je utjecaj parametra posmične funkcije q na kritičnu temperaturu toplinskog izvijanja ΔT_{cr} (I–I–I) FG sendvič kvadratne ploče tipa ($r = p = 1$, $\Delta C = 10\%$, $a = b$) pod kombiniranim higrotermičkim opterećenjem. Parametar q , uzet kao neparan cijeli broj, upravlja konvergencijskim ponašanjem predložene trigonometrijske funkcije posmične deformacije. Rezultati su prikazani za $q = 5, 7$, i 9 te uspoređeni s referentnim TSDT rješenjem. Za sve vrijednosti parametra ΔT_{cr} predloženi model predviđa vrijednosti unutar približno 6 do 7 % u odnosu na TSDT rezultate, što potvrđuje dosljednu točnost i robusnost modela. Neosjetljivost rezultata na promjene parametra q unutar odabranog raspona dodatno potvrđuje stabilnost predložene formulacije i njezinu pouzdanost za praktične analize higrotermičkog izvijanja FG sendvič ploča.

Slika 2. Utjecaj parametra q u predloženoj funkciji oblika na procijenjenu kritičnu temperaturu toplinskog izvijanja ΔT_{cr} za (I–I–I) FG sendvič kvadratnu ploču s ($r = p = 1$, $\Delta C = 10\%$, $a = b$)

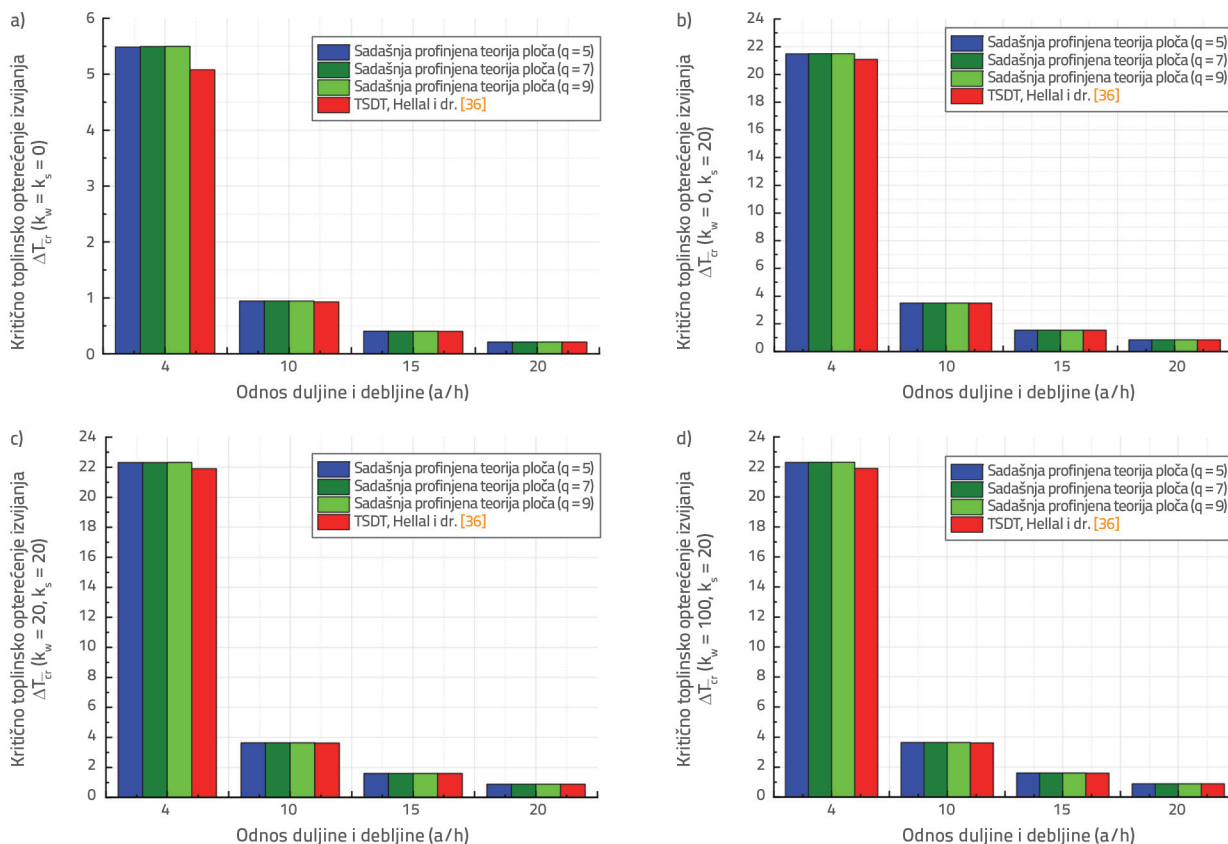


Slika 3. Utjecaj Winklerove konstante krutosti podloge (k_w) na kritičnu temperaturu toplinskog izvijanja (ΔT_{cr}) kvadratne FG sendvič ploče ($l-l-l$) ($r = p = 1, \Delta C = 10\%$, $a = b$) pod higrotermičkim opterećenjem

Slika 3. prikazuje utjecaj Winklerove konstante krutosti podloge (k_w) na kritičnu temperaturu toplinskog izvijanja (ΔT_{cr}) ($l-l-l$) FG sendvič kvadratne ploče izložene higrotermičkom opterećenju. Rezultati, prikazani detaljno u tablici 2., pokazuju da ΔT_{cr}

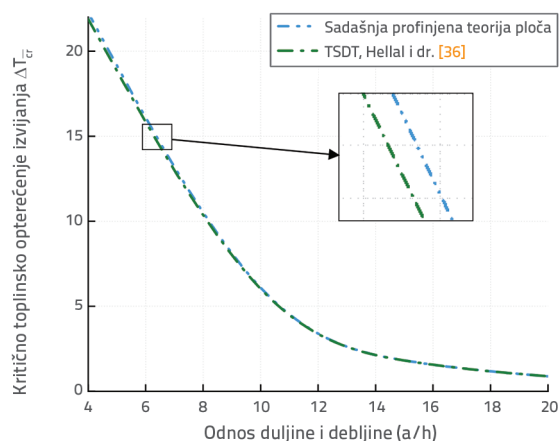
monotono raste s povećanjem k_w , potvrđujući stabilizirajući učinak Winklerove komponente elastične podloge. Ovaj trend je konzistentan u cijelom rasponu razmatranih omjera vitkosti, pri čemu predloženi unaprijeđeni model održava blisko podudaranje s referentnim TSDT rješenjem i pokazuje postotne razlike ispod 2 %. Nalazi naglašavaju da uključivanje realistične krutosti podloge u analitički model značajno povećava otpornost na izvijanje, što je učinak od praktične važnosti za projektiranje FGM sendvič panela u građevinskim i strojarskim primjenama gdje se ne može zanemariti usklađenost potkonstrukcije.

Slika 4. prikazuje varijaciju razlike kritične temperature toplinskog izvijanja (ΔT_{cr}) za FG sendvič kvadratnu ploču s $r = p = 1$ i $\Delta C = 0,1\%$, evaluiranu pod različitim higrotermičkim uvjetima. Rezultati predloženog unaprijeđenog modela posmičnog deformiranja ($q = 5, 7, 9$) uspoređeni su s referentnim TSDT rješenjem za različite omjere vitkosti (a/h) i postavke krutosti podloge. Trenutni model postiže izvrsno podudaranje, s postotnim razlikama dosljedno ispod 2 % i maksimalnim odstupanjem od 1,75 %, potvrđujući njegovu robusnost u svim geometrijskim i okolišnim scenarijima. Ova visoka razina točnosti, u kombinaciji sa smanjenom računalnom složenosti, pokazuje praktičnu vrijednost modela za predviđanje toplinskog izvijanja u naprednim FG sendvič konstrukcijama na elastičnim podlogama.

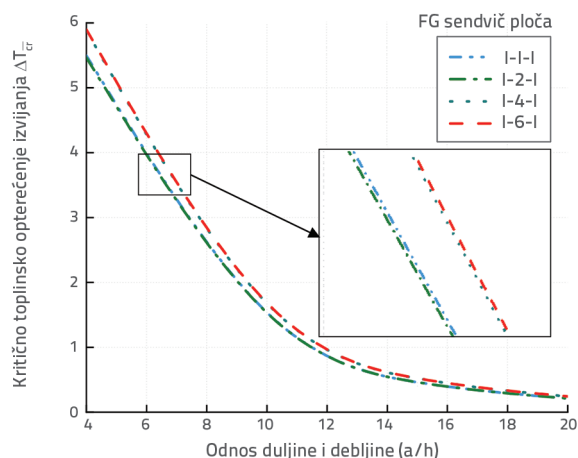


Slika 4. Histogrami a) do d) koji prikazuju promjenu kritične temperature toplinskog izvijanja s omjerom vitkosti (a/h) za kvadratne FG sendvič ploče pod različitim uvjetima podloge i posmične krutosti. Rezultati ovog modela uspoređeni su s onima iz referentnog rješenja TSDT

Slika 5. ilustrira varijaciju kritične temperature toplinskog izvijanja ΔT_{cr} za (1-1-1) FG sendvič nanoskalnu kvadratnu ploču s $\mu = 0,5$ kao funkciju omjera vitkosti a/h . Konfiguracija (1-1-1) odgovara jednakim debljinama gornje površine, gradirane jezgre i donje površine. Rezultati pokazuju monotoni pad ΔT_{cr} s povećanjem a/h , što se pripisuje smanjenju savojne krutosti kako ploča postaje vitkija. Predložena unaprijeđena teorija posmičnog deformiranja blisko se podudara s referentnim TSDT rezultatima Hellala [36], pokazujući izvrsnu korelaciju u svim razmatranim omjerima vitkosti.



Slika 5. Promjena kritične temperature toplinskog izvijanja ΔT_{cr} za (1-1-1) FG sendvič nanoskalnu kvadratnu ploču s $\mu = 0,5$ kao funkcija omjera vitkosti (a/h)



Slika 6. Kritično toplinsko izvijanje FG sendvič kvadratne ploče bez Winkler-Pasternakove podloge u odnosu na omjer debljine (a/h), ($\mu = 2$, $r = p = 1$, $q = 9$, $\Delta C = 0,1\%$, $k_w = k_s = 0$)

Slika 6. ilustrira varijaciju kritične temperature toplinskog izvijanja (ΔT_{cr}) za FG sendvič nanoskalne kvadratne ploče s različitim konfiguracijama debljina lica-jezgra-lica, evaluiranu za krutost podloge $\mu = 2$, kao funkciju omjera vitkosti (a/h). Rezultati pokazuju da povećanje krutosti podloge povećava otpornost na izvijanje u svim konfiguracijama, potvrđujući stabilizirajuću ulogu elastične podloge. Za svaku razmatranu konfiguraciju debljine, ΔT_{cr} dosljedno opada s povećanjem a/h zbog smanjenja savojne krutosti vitkijih ploča. Blisko podudaranje između predviđanja predloženog unaprijeđenog modela i referentnog TSDT rješenja pokazuje sposobnost formulacije da točno uhvati povezane učinke geometrijske vitkosti, sendvič konfiguracije, krutosti podloge i higrotermičkog opterećenja.

4. Zaključak

Ovo istraživanje predstavilo je unaprijeđenu teoriju posmičnog deformiranja s četirima varijablama koja uključuje novu trigonometrijsku poprečnu posmičnu funkciju za analizu higrotermičkog izvijanja i dinamike FG sendvič nanoskalnih ploča smještenih na Winkler-Pasternak elastičnim podlogama. Predložena posmična funkcija inherentno zadovoljava uvjete nultih posmičnih naprezanja na površinama ploče, čime se uklanja potreba za empirijskim faktorima korekcije smicanja i osigurava kompatibilnost s trodimenzionalnom teorijom elastičnosti.

Validacija u usporedbi s referentnim TSDT rezultatima pokazala je visoku točnost predloženog modela, s postotnim razlikama općenito ispod 2 % za širok raspon geometrijskih omjera vitkosti, parametara krutosti podloge i konfiguracija debljina lica-jezgra-lica. Parametarska analiza otkrila je da povećanje krutosti podloge značajno povećava otpornost na izvijanje, a povećanje omjera vitkosti smanjuje kritičnu temperaturu toplinskog izvijanja. Model je također pokazao robusnost u odnosu na varijacije parametra posmične funkcije q , održavajući pogreške predviđanja unutar 6 do 7 % u usporedbi s TSDT-om. Kombinirajući računalnu učinkovitost s visokom prediktivnom sposobnošću, predložena formulacija pruža pouzdan analitički alat za projektiranje i optimizaciju naprednih FG sendvič struktura u građevinskom, pomorskom i zrakoplovnom inženjerstvu. Njezina sposobnost uključivanja učinaka nelokalne elastičnosti, higrotermičkog opterećenja i realističnih uvjeta oslonca čini je osobito vrijednom za moderne infrastrukturne komponente izložene kombiniranim okolišnim i mehaničkim zahtjevima.

LITERATURA

- [1] Birman, V.: Functionally Graded Materials and Structures, Encyclopedia of Thermal Stresses, Springer Netherlands, 2014., pp. 1858-1865
- [2] Mahamood, R.M., Akinlabi, E.T.: Types of Functionally Graded Materials and Their Areas of Application, Functionally Graded Materials, Springer International Publishing, 2017., pp. 9-21

- [3] Reimanis, I.E.: Functionally Graded Materials, Handbook of Advanced Materials, 2004., pp. 465-486
- [4] Kieback, B., Neubrand, A., Riedel, H.: Processing techniques for functionally graded materials, Materials Science and Engineering, 362 (2003) 1, pp. 81-106, doi: [https://doi.org/10.1016/S0921-5093\(03\)00578-1](https://doi.org/10.1016/S0921-5093(03)00578-1).
- [5] Hadipour, M., Ahmadian, M.T., Lashkari, S.G., Barari, A.: Natural Frequency Improvement of a Suspended FGM Bridge, 2011., doi: <https://doi.org/10.1115/IMECE2011-63411>.
- [6] Kumar, A., Kumar, D.: Vibration analysis of functionally graded stiffened shallow shells under thermo-mechanical loading, Materials Today: Proceedings, 44 (2021), pp. 4590-4595, doi: <https://doi.org/10.1016/j.matpr.2020.10.826>.
- [7] Chandrasekaran, S., Hari, S., Amirthalingam, M.: Functionally graded materials for marine risers by additive manufacturing for high-temperature applications: Experimental investigations, Structures, 35 (2022), pp. 931-938, doi: <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2021.12.004>.
- [8] Van Doan, D., Van Minh, P., Van Ke, T., Nhung, N.T.C., Van Thom, D.: An Overview of Functionally Graded Materials: From Civil Applications to Defense and Aerospace Industries, Journal of Vibration Engineering & Technologies, 13 (2025) 1, p. 68, doi: [10.1007/s42417-024-01691-8](https://doi.org/10.1007/s42417-024-01691-8).
- [9] Bhoi, N.K., Singh, H., Nanda, H.S.: Novel Applications of Functionally Graded Materials, CRC Press, 2025.
- [10] Zhang, J., Qi, D., Zhou, L., Zhao, L., Hu, N.: A progressive failure analysis model for composite structures in hygrothermal environments, Composite Structures, 133 (2015), pp. 331-342, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2015.07.063>.
- [11] Benkhedda, A., Tounsi, A., Adda bedia, E.A.: Effect of temperature and humidity on transient hygrothermal stresses during moisture desorption in laminated composite plates, Composite Structures, 82 (2008) 4, pp. 629-635, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2007.04.013>.
- [12] Liu, Z., Lei, Y., Zhang, X., Kang, Z., Zhang, J.: Effect Mechanism and Simulation of Voids on Hygrothermal Performances of Composites, Polymers, 14 (2022) 5, doi: [10.3390/polym14050901](https://doi.org/10.3390/polym14050901).
- [13] Huang, M.H., Thambiratnam, D.P.: Dynamic Response of Plates on Elastic Foundation to Moving Loads, Journal of Engineering Mechanics, 128 (2002) 9, pp. 1016-1022, doi: [10.1061/\(ASCE\)0733-9399\(2002\)128:9\(1016\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9399(2002)128:9(1016)).
- [14] Chatbi, M., Krour, B., Benatta, M.A., Harrat, Z.R., Amziane, S., Bouiadjra, M.B.: Bending analysis of nano-SiO₂ reinforced concrete slabs resting on elastic foundation, Structural Engineering and Mechanics, An Int'l Journal, 84 (2022) 5, pp. 685-697, doi: <https://doi.org/10.12989/sem.2022.84.5.685>.
- [15] Chatbi, M., Harrat, Z.R., Ghazoul, T., Bouiadjra, M.B.: Free vibrational analysis of composite beams reinforced with randomly aligned and oriented carbon nanotubes, resting on an elastic foundation, Journal of Building Materials and Structures, 9 (2022) 1, pp. 22-32, doi: <https://doi.org/10.34118/jbms.v9i1.1895>.
- [16] Zhou, D., Cheung, Y.K., Lo, S.H., Au, F.T.K.: Three-dimensional vibration analysis of rectangular thick plates on Pasternak foundation, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 59 (2004) 10, pp. 1313-1334, doi: <https://doi.org/10.1002/nme.915>.
- [17] Dine Elhennani, S. et al.: Buckling and Free Vibration Analyses of Various Nanoparticle Reinforced Concrete Beams Resting on Multi-Parameter Elastic Foundations, Materials, 16 (2023) 17, doi: <https://doi.org/10.3390/ma16175865>.
- [18] Rainer, J.H.: Damping in Dynamic Structure - Foundation Interaction, Canadian Geotechnical Journal, 12 (1975) 1, pp. 13-22, doi: [10.1139/t75-002](https://doi.org/10.1139/t75-002).
- [19] Harrat, Z.R., et al.: Bending analysis of nano-Fe₂O₃ reinforced concrete slabs exposed to temperature fields and supported by viscoelastic foundation, Advances in concrete construction, (2024), pp. 111-126, doi: <https://doi.org/10.12989/acc.2024.17.2.111>.
- [20] Kirchhoff, G.: Über das Gleichgewicht und die Bewegung einer elastischen Scheibe, Journal für die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal), 40 (1850), pp. 51-88
- [21] Whitney, J.: Shear correction factors for orthotropic laminates under static load, 1973.
- [22] Reddy, J., Liu, C.: A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells, International Journal of Engineering Science, 23 (1985) 3, pp. 319-330.
- [23] Reddy, J.: A general non-linear third-order theory of plates with moderate thickness, International Journal of Non-Linear Mechanics, 25 (1990) 6, pp. 677-686.
- [24] Reddy, J.N.: A simple higher-order theory for laminated composite plates, (1984).
- [25] Benfrid, A., Benbakhti, A., Harrat, Z.R., Chatbi, M., Krour, B., Bouiadjra, M.B.: Thermomechanical Analysis of Glass Powder Based Eco-concrete Panels: Limitations and Performance Evaluation, Periodica Polytechnica Civil Engineering, 67 (2023) 4, pp. 1284-1297, doi: [10.3311/PPci.22781](https://doi.org/10.3311/PPci.22781).
- [26] Chatbi, M., et al.: Nano-Clay Platelet Integration for Enhanced Bending Performance of Concrete Beams Resting on Elastic Foundation: An Analytical Investigation, Materials, 16 (2023) 14, doi: <https://doi.org/10.3390/ma16145040>.
- [27] Benbakhti, A., Benfrid, A., Harrat, Z.R., Chatbi, M., Bouiadjra, M.B., Krour, B.: An Analytical Analysis of the Hydrostatic Bending to Design a Wastewater Treatment Plant by a New Advanced Composite Material, Journal of Composite & Advanced Materials/Revue des Composites et des Matériaux Avancés, 34 (2024) 2, pp. 177-188, doi: <https://doi.org/10.18280/rcma.340207>.
- [28] Frih, A., et al.: A novel hyperbolic integral-Quasi-3D theory for flexural response of laminated composite plates, Geomechanics and Engineering, 34 (2023) 3, p. 233, doi: <https://doi.org/10.12989/gae.2023.34.3.233>.
- [29] Abderrahmane, M.A., et al.: Innovative theoretical approaches for analyzing functionally graded plates: integrating shear and thickness effects, Composite Interfaces, (2025), pp. 1-22, doi: <https://doi.org/10.1080/09276440.2025.2521973>.
- [30] Cinefra, M., Petrolo, M., Li, G., Carrera, E.: Hygrothermal analysis of multilayered composite plates by variable kinematic finite elements, Journal of Thermal Stresses, 40 (2017) 12, pp. 1502-1522, doi: [10.1080/01495739.2017.1360164](https://doi.org/10.1080/01495739.2017.1360164).
- [31] Sobhy, M.: Differential quadrature method for magneto-hygrothermal bending of functionally graded graphene/Al sandwich-curved beams with honeycomb core via a new higher-order theory, Journal of Sandwich Structures & Materials, 23 (2020) 5, pp. 1662-1700, doi: [10.1177/1099636219900668](https://doi.org/10.1177/1099636219900668).
- [32] Bhoyar, S., Varghese, V., Khalsa, L.: Hygrothermoelastic response in the bending analysis of elliptic plate due to hygrothermal loading, Journal of Thermal Stresses, 43 (2020) 3, pp. 372-400, doi: [10.1080/01495739.2019.1711477](https://doi.org/10.1080/01495739.2019.1711477).
- [33] Benachi, H., et al.: Elastic instability analysis of functionally graded nanoplates under nonlinear coupling loads on a shear elastic foundation via non-local theory, Geomechanics and Engineering, 41 (2025) 5, p. 507, doi: <https://doi.org/10.12989/gae.2025.41.5.507>.

- [34] Zaitoun, M.W., et al.: Influence of the visco-Pasternak foundation parameters on the buckling behavior of a sandwich functional graded ceramic-metal plate in a hygrothermal environment, *Thin-Walled Structures*, 170 (2022) p. 108549, doi: <https://doi.org/10.1016/j.tws.2021.108549>.
- [35] Refrafi, S., et al.: Effects of hygro-thermo-mechanical conditions on the buckling of FG sandwich plates resting on elastic foundations, *Computers and Concrete*, 25 (2020) 4, pp. 311-325, doi: <https://doi.org/10.12989/cac.2020.25.4.311>.
- [36] Hellal, H., et al.: Dynamic and stability analysis of functionally graded material sandwich plates in hygro-thermal environment using a simple higher shear deformation theory, *Journal of Sandwich Structures & Materials*, 23 (2019) 3, pp. 814-851, doi: [10.1177/1099636219845841](https://doi.org/10.1177/1099636219845841).
- [37] Zaitoun, M.W., et al.: An efficient computational model for vibration behavior of a functionally graded sandwich plate in a hygrothermal environment with viscoelastic foundation effects, *Engineering with Computers*, 39 (2023) 2, pp. 1127-1141, doi: [10.1007/s00366-021-01498-1](https://doi.org/10.1007/s00366-021-01498-1).
- [38] Fazzolari, F.A., Carrera, E.: Thermal Stability of FGM Sandwich Plates Under Various Through-the-Thickness Temperature Distributions, *Journal of Thermal Stresses*, 37 (2014) 12, pp. 1449-1481, doi: [10.1080/01495739.2014.937251](https://doi.org/10.1080/01495739.2014.937251).
- [39] Voigt, W.: Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper, *Annalen der Physik*, 274 (1889) 12, pp. 573-587, doi: <https://doi.org/10.1002/andp.18892741206>.
- [40] Reuss, A.: Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle, *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics*, 9 (1929) 1, pp. 49-58, doi: <https://doi.org/10.1002/zamm.19290090104>.
- [41] Kumar, R., Lal, A., Singh, B.N., Singh, J.: New transverse shear deformation theory for bending analysis of FGM plate under patch load, *Composite Structures*, 208 (2019) pp. 91-100, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2018.10.014>.
- [42] Kumar, D., Singh, S.B.: Effects of boundary conditions on buckling and postbuckling responses of composite laminate with various shaped cutouts, *Composite Structures*, 92 (2010) 3, pp. 769-779, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.08.049>.
- [43] Eringen, A.C.: Nonlocal polar elastic continua, *International journal of engineering science*, 10 (1972) 1, pp. 1-16.
- [44] Ahmadi, G.: Linear theory of non-local viscoelasticity, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 10 (1975) 6, pp. 253-258, doi: [https://doi.org/10.1016/0020-7462\(75\)90001-3](https://doi.org/10.1016/0020-7462(75)90001-3).
- [45] Eringen, A.C.: On differential equations of nonlocal elasticity and solutions of screw dislocation and surface waves, *Journal of applied physics*, 54 (1983) 9, pp. 4703-4710.
- [46] Kecir, A., Chatbi, M., Harrat, Z.R., Bouiadjra, M.B., Bouremana, M., Krour, B.: Enhancing the Mechanical Performance of Concrete Slabs through the Incorporation of Nano-sized Iron Oxide Particles (Fe₂O₃): Non-local Bending Analysis, *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 68 (2024) 3, pp. 842-858.
- [47] Harrat, Z.R., et al.: Modeling the Thermoelastic Bending of Ferric Oxide (Fe₂O₃) Nanoparticles-Enhanced RC Slabs, *Materials*, 16 (2023) 8, p. 3043, doi: <https://doi.org/10.3390/ma16083043>.
- [48] Benfrid, A., Chatbi, M., Harrat, Z.R., Bachir Bouiadjra, M.: Selective Integration of Waste-Derived Glass Nanopowders in Structural Wall Concrete: Improving Thermal Efficiency and Elasto-Mechanical Properties for Sustainable Construction, *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, 69 (2025) 3, pp. 954-965, doi: [10.3311/PPci.39913](https://doi.org/10.3311/PPci.39913).
- [49] Reddy, J.N.: *Mechanics of laminated composite plates and shells: Theory and analysis*, CRC press, 2003.
- [50] Mantari, J.L., Oktem, A.S., Guedes Soares, C.: A new higher order shear deformation theory for sandwich and composite laminated plates, *Composites Part B: Engineering*, 43 (2012) 3, pp. 1489-1499, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compositesb.2011.07.017>.
- [51] Ferreira, A.J.M., Batra, R.C., Roque, C.M.C., Qian, L.F., Martins, P.A.L.S.: Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method, *Composite Structures*, 69 (2005) 4, pp. 449-457, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2004.08.003>.
- [52] Lakhder, M., Benfrid, A., Bachir Bouiadjra, M., Chatbi, M., Harrat, Z.R., Benbakhti, A.: The Mechanical Bending Behavior of a New Metal Alloy Nano-Reinforced Plate Incorporating Tungsten Nanoparticles, *NIPES - Journal of Science and Technology Research*, 7 (2025) 3, pp. 423-440, doi: [10.37933/nipes/7.3.2025.1682](https://doi.org/10.37933/nipes/7.3.2025.1682).
- [53] Chao, L.P., Shyu, S.L.: Nonlinear buckling of fiber-reinforced composite plates under hygrothermal effects, *Journal of the Chinese Institute of Engineers*, 19 (1996) 6, pp. 657-667, doi: [10.1080/02533839.1996.9677831](https://doi.org/10.1080/02533839.1996.9677831).
- [54] Lo, S.H., Zhen, W., Cheung, Y.K., Wanji, C.: Hygrothermal effects on multilayered composite plates using a refined higher order theory, *Composite Structures*, 92 (2010) 3, pp. 633-646, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2009.09.034>.
- [55] Moleiro, F., Mota Soares, C.M., Carrera, E.: Three-dimensional exact hygro-thermo-elastic solutions for multilayered plates: Composite laminates, fibre metal laminates and sandwich plates, *Composite Structures*, 216 (2019) pp. 260-278, doi: <https://doi.org/10.1016/j.compstruct.2019.02.071>.
- [56] Sharma, P., Singh, R.: Investigation on modal behaviour of FGM annular plate under hygrothermal effect, *IOP Conference Series: Materials Science and Engineering*, 624 (2019) 1, p. 012001, doi: [10.1088/1757-899X/624/1/012001](https://doi.org/10.1088/1757-899X/624/1/012001).
- [57] Islam, T.F., Kedar, G.D.: Hygrothermal buckling analysis of thin rectangular FGM plate with variable thickness, *Engineering Computations*, 41 (2024) 3, pp. 710-726, doi: [10.1108/EC-09-2023-0601](https://doi.org/10.1108/EC-09-2023-0601).
- [58] Khetir, H., Benfrid, A., Bouiadjra, M.B., Harrat, Z.R., Chatbi, M.: Mechanical instabilities of nano-composite plates using elasticity theories, *Studies in Engineering and Exact Sciences*, 5 (2024) 2, p. e5409, doi: [10.54021/seesv5n2-009](https://doi.org/10.54021/seesv5n2-009).