

Primljen / Received: 18.7.2023.

Ispravljen / Corrected: 4.3.2024.

Prihvaćen / Accepted: 25.3.2024.

Dostupno online / Available online: 10.4.2024.

Ispitivanje poprečne unutarnje sile sandučastog nosača primjenom principa varijacije energije

Autor:

Izv.prof.dr.sc. **Zhaonan Wang**, dipl.ing.grad.

Gradsko sveučilište Lanzhou, Lanzhou Kina

Odjel za građevinarstvo

524299845@qq.com

Autor za korespondenciju

Prethodno priopćenje

Zhaonan Wang

Ispitivanje poprečne unutarnje sile sandučastog nosača primjenom principa varijacije energije

U ovom je radu ispitana poprečna unutarnja sila sandučastog nosača trapeznog presjeka pod ekscentričnim opterećenjem. Proučeno je kako distorzija sandučastog nosača, ali i razlika u posmiku okvira utječu na poprečnu silu. Za analizu poprečnih unutarnjih sila okvira usvojena je metoda varijacije energije koja se temelji na principu minimalne potencijalne energije. Varijabilna posmična razlika gornje ploče smatrana je nepoznatom veličinom te je utvrđena diferencijalna jednadžba četvrtoga reda. Poprečni moment savijanja okvira dobiven je na temelju razlike u posmiku. Za provjeru predložene metode i analizu razlika između rezultata poprečne unutarnje sile izračunanih različitim metodama primijenjena su dva primjera. Učinak distribucije iskrivljenoga poprečnog momenta savijanja sandučastog nosača na svakoj ploči ispitan je za različite omjere krutosti. Rezultati su pokazali da se poprečna unutarnja sila sandučastog nosača izračunana predloženom metodom podudara s rezultatima konačnih elemenata, s maksimalnom pogreškom manjom od 9,68 %. Kad se povećao omjer krutosti sandučastog nosača, distribucija iskrivljenoga poprečnog momenta savijanja na gornjoj se ploči povećala, a na donjoj ploči smanjila.

Ključne riječi:

mostogradnja, poprečna unutarnja sila, metoda varijacije energije, sandučasti nosač trapeznog presjeka, distorzija

Research Paper

Zhaonan Wang

Investigation of the transverse internal force of a box girder using the energy variational principle

This study investigated the transverse internal force of a box girder with a trapezoidal cross-section under eccentric loading. The effects of the box girder distortion and frame shear difference on the transverse internal force were considered. An energy variation method based on the minimum potential energy principle was adopted for transverse internal force analysis of the frames. The variable shear difference of the top slab was considered an unknown quantity, and a fourth-order governing differential equation was established. The transverse bending moment of the frame was obtained by solving for the shear difference. Two examples were used to verify the proposed method and analyse the differences between the transverse internal force results calculated using different methods. The effect of the distribution of the box-girder distorted transverse bending moment on each slab was investigated for various stiffness ratios. The results showed that the transverse internal force of the box girder calculated using the proposed method agreed well with the finite element results, with a maximum error of less than 9.68 %. When the stiffness ratio of the box girder increased, the distribution of the distorted transverse bending moment on the top slab increased, whereas that on the bottom slab decreased.

Key words:

bridge engineering, transverse internal force, energy variational method, box girder with a trapezoidal cross-section, distortion

1. Uvod

U novije vrijeme sandučasti nosači projektiraju se s tankim stijenkami i manje dijafragmi. Podescentričnim opterećenjem, zbog utjecaja distorzije sandučastog nosača, izračun poprečne unutarnje sile sandučastog nosača postaje složen. Poprečni moment savijanja sandučastog nosača najvažniji je element poprečne unutarnje sile i ključni čimbenik koji se mora uzeti u obzir pri projektiranju mosta. Netočni izračuni poprečnih momenata savijanja jedan su od uzroka uzdužnih pukotina na spoju hrpta sandučastog nosača i gornje ploče.

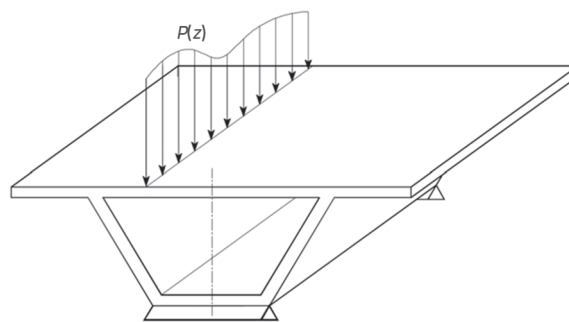
Nekoliko je znanstvenika istraživalo točan izračun poprečnih unutarnjih sila sandučastog nosača. Stefanou i sur. [1] proučavali su utjecaj distorzije na izračun poprečnih unutarnjih sila sandučastih nosača. Jia i sur. [2], Zhao i sur. [3, 4] te Li i sur. [5] proučavali su poprečne unutarnje sile okvirnih nosača od valovitog čelika metodom analize okvira. Wang i sur. [6] predložili su poboljšanu metodu analize okvira te su proučavali poprečnu unutarnju silu sandučastog nosača s kosim hrptom. Chithra i sur. [7] primijenili su metodu analize jednostavnog okvira (engl. *Simple Frame Analysis – SFA*) za analizu poprečne unutarnje sile sandučastog nosača s jednim sandukom i dvostrukim čelijama. Rezultati su izračunani i uspoređeni s onima dobivenima primjenom trodimenzionalnog programa konačnih elemenata. Kurian i sur. [8, 9] analizirali su nedostatke SFA metode i utjecaje konzolne ploče i opterećenja vozila na poprečni moment savijanja. Rambo-Roddenberry i sur. [10] primijenili su metodu konačnih elemenata za analizu poprečnih unutarnjih sila sandučastih nosača na koje utječu zaštitne ograde. Zheng i sur. [11] proučavali su poprečne unutarnje sile u mostovima zakrivljenih sandučastih poprečnih presjeka. Guo i sur. [12] izračunali su poprečne unutarnje sile pravokutnih i trapeznih sandučastih nosača pomoću analize okvira. Zhong i sur. [13] primijenili su metodu konačnih elemenata za izračun i analizu poprečne unutarnje sile sandučastog nosača. Zhang i sur. [14] proveli su eksperimentalno istraživanje učinkovitosti bočnog naprezanja montažno segmentiranoga kompozitnog mosta sandučastoga poprečnog presjeka s valovitim čeličnim hrptom. Resupero i sur. [15] razvili su analitički model kojim je ispitan odnos između uzdužne posmične deformacije i poprečne deformacije od savijanja kako bi se primijenile informacije o poprečnoj unutarnjoj sili na proračun poprečne armature sandučastih nosača. Utjecaj deformacije sandučastog nosača na izračune poprečnog momenta savijanja ne može se zanemariti jer njegova veličina mijenja raspodjelu poprečnog momenta savijanja svake ploče. Wang i sur. [16] razmatrali su utjecaj distorzije pri primjeni metode analize okvira za proučavanje poprečnih unutarnjih sila sandučastih nosača s jednim sandukom i dvostrukom čelijom te s valovitim čeličnim hrptom. Za ispitivanje distorzije sandučastog nosača povezanog s poprečnim unutarnjim silama Zhang i sur. [17] proučavali su distorziju trapeznoga sandučastog nosača primjenom metode slične onoj koja se primjenjuje za proučavanje torzije te su analizirali utjecaj različitih parametara na distorziju. Xu i sur. [18]

primijenili su opću metodu usklađivanja za proučavanje distorzije sandučastih nosača. Izračunane teorijske vrijednosti većinom su verificirane metodom konačnih elemenata. Ji i sur. [19] predložili su metodu modifikacije modela konačnih elemenata mosta temeljenu na metodi odzivne površine i algoritmu Fmincon. To znatno poboljšava točnost izračuna konačnih elemenata poprečne unutarnje sile sandučastog nosača.

Ispitivanja navedenih poprečnih unutarnjih sila sandučastih nosača primarno su se temeljila na analizi okvira i metodama konačnih elemenata. U ovom je radu okomito ekscentrično opterećenje koje djeluje na sandučasti nosač rastavljeno na pozitivna i antisimetrična opterećenja koja ne uzimaju u obzir samo distorziju sandučastog nosača, već i utjecaj posmične razlike okvira na izračun poprečne unutarnje sile. Metodom varijacije energije utvrđena je kontrolna diferencijalna jednačba četvrtog reda. Uzimajući posmičnu razliku na gornjoj ploči okvira, $\mathcal{T}(z)$, kao nepoznatu veličinu, može se dobiti moment savijanja okvira uzrokovan posmičnom razlikom. Superpozicija momenata savijanja generiranih pozitivnim i antisimetričnim opterećenjem određuje konačnu poprečnu unutarnju silu sandučastog nosača. Također su ispitani učinci promjene omjera krutosti na iskrivljeni poprečni moment savijanja sandučastog nosača.

2. Pretpostavke i modeli analize

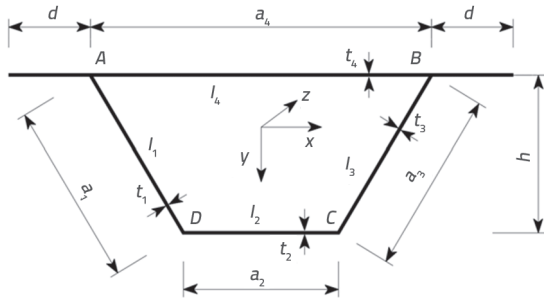
Prvo je ispitan jednostavno poduprti sandučasti nosač s trapeznim poprečnim presjekom jednake visine kao što je to prikazano na slici 1. Vertikalno ekscentrično ravnomjerno raspoređeno opterećenje $P(z)$ djeluje na sandučasti nosač. Radi praktičnosti, navedeno opterećenje se u ovome radu označava s P . Segment grede jedinične duljine izrezan je iz sredine raspona jednostavno poduprte grede. Njegova gornja ploča, donja ploča, hrbat i druge ploče činile su zatvoreni okvir kao što je to prikazano na slici 2.



Slika 1. Jednostavno poduprti sandučasti nosač s pripadajućim kontinuiranim opterećenjem

Na slici 2. a_1 , a_2 , a_3 i a_4 redom označavaju širine lijevoga hrpta, donje ploče, desnoga hrpta i gornje ploče; d je širina konzolne ploče; t_1 , t_2 , t_3 i t_4 su pripadajuće debljine navedenih ploča, a h je visina grede. $I_1 = I_3$, I_2 i I_4 označavaju momente inercije pločastih elemenata izvan ravnine i mogu se izračunati pomoću $I_i = t_i^3/$

$[12(1-\mu^2)]$, pri čemu je $i = 1, 2, 4$, a μ je Poissonov koeficijent. Koordinatni sustav je desni koordinatni sustav.

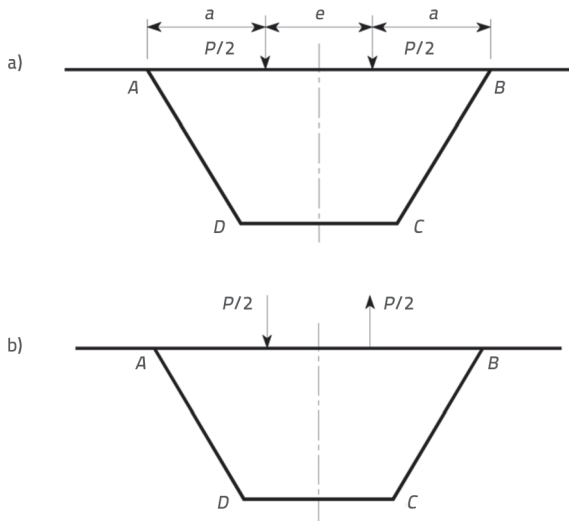


Slika 2. Poprečni presjek trapeznoga sandučastog nosača

Okrvir je uzet kao predmet istraživanja te su donesene tri primarne pretpostavke [6, 16]:

1. Zanemarena je poprečna deformacija svake ploče koja čini okvir, to jest, opseg sandučastog presjeka smatran je nestlačivim te nije bilo prisutno poprečno naprezanje.
2. Kada je došlo do distorzije sandučastog nosača, ploče koje su činile sandučasti presjek smatrane su poprečnim presjekom svakoga uzdužnog pločastog nosača, što je zadovoljilo pretpostavku ravnog presjeka.
3. Zanemaren je utjecaj debljine svake ploče sandučastog nosača na savijanje, odnosno posmično naprezanje i normalno naprezanje pri savijanju jednoliko su raspoređeni po debljini stjenke.

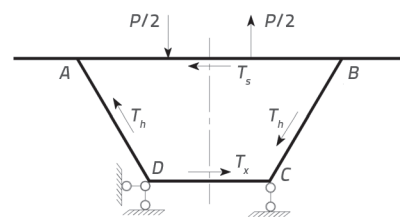
Za ispitivanje poprečne unutarnje sile sandučastog nosača ekscentrično opterećenje primijenjeno na gornju ploču sandučastog nosača rastavljeno je na pozitivna i antisimetrična opterećenja kao što je to prikazano na slici 3., pri čemu a označava udaljenost između položaja opterećenja i ruba gornje ploče, a e udaljenost između djelovanja koja djeluju na gornju ploču.



Slika 3. Dekompozicija opterećenja na okviru: a) pozitivno simetrično opterećenje; b) antisimetrično opterećenje

Poprečna unutarnja sila okvira kod kojeg dolazi do pozitivnoga simetričnog opterećenja može se izračunati tako da se prvo doda oslonac, koji se potom ukloni te se njegovo djelovanje zamijeni poprečnom silom. Na kraju se rezultati superponiraju kako bi se dobila poprečna unutarnja sila okvira pod pozitivno simetričnim opterećenjem. Moment savijanja okvira izuzetno je mali pod obrnutom silom nosivosti te se zato općenito zanemaruje. Budući da je opterećenje imalo pozitivnu simetriju, distorzija okvira nije stvorila poprečni moment savijanja. Poprečna unutarnja sila koju stvara pozitivno simetrično opterećenje izračunana je metodom konačnih elemenata ili metodom mehanike konstrukcija.

Poprečna unutarnja sila okvira pod antisimetričnim opterećenjem također je izračunana tako da se prvo doda oslonac, koji se potom ukloni te se njegovo djelovanje zamijeni poprečnom silom. Uz antisimetrično opterećenje nepoznata posmična razlika, $T(z)$, također je djelovala na svaku ploču poduprtog okvira. Navedena se posmična razlika u ovom radu označava s T . Učinci opterećenja prikazani su na slici 4. Moment savijanja okvira generiran je antisimetričnim opterećenjem $P/2$ i posmičnom razlikom T . Na slici 4. T_s , T_x , i T_h označavaju posmične razlike u gornjemu, donjemu i rebrastome hrptu. Kada posmična razlika djeluje samo na okvir, T_s uzrokuje bočno pomicanje okvira i stvaranje unutarnje sile. U ovom se radu nepoznata posmična razlika T odnosi samo na T_s .



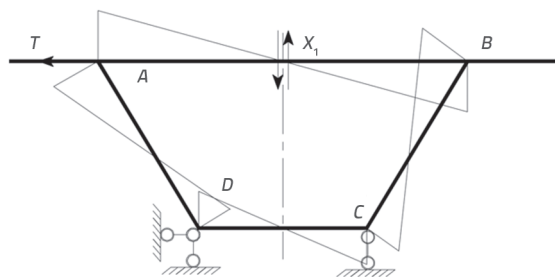
Slika 4. Proračunski model okvira pod antisimetričnim opterećenjem

Kako bi se izračunao T , princip varijacije energije primjenjuje se za konstruiranje diferencijalne jednadžbe s T kao nepoznatom veličinom. Navedeno je izvedeno kako bi se riješio moment savijanja okvira uzrokovan posmičnom razlikom u gornjoj ploči. Moment savijanja okvira uzrokovan antisimetričnim opterećenjem, $P/2$, može se izračunati metodom mehanike konstrukcija ili metodom konačnih elemenata. Za uspostavljanje diferencijalne jednadžbe određeni su odnos između horizontalnog pomaka okvira u x -smjeru i antisimetrično opterećenje prikazano na slici 4.

3. Horizontalni pomak poduprtog okvira pod antisimetričnim opterećenjem

3.1. Unutarnja sila okvira i horizontalni pomak uzrokovan posmičnom razlikom T

Dijagram momenta savijanja okvira uzrokovan posmičnom razlikom T upućuje na antisimetriju oko y -osi kao što je to prikazano na slici 5.



Slika 5. Moment savijanja okvira uzrokovan posmičnom razlikom

Moment savijanja M_A točke A na slici 5. jednak je $a_4 X_1 / 2$, a moment savijanja M_D točke D jednak je $(a_2 X_1 - hT) / 2$, pri čemu je

$$X_1 = \left[\frac{a_1(a_4 + 2a_2)}{l_1} + \frac{a_2^2}{l_2} \right] \frac{h}{\Gamma} T \tag{1}$$

$$\Gamma = \frac{a_4^3}{l_4} + \frac{a_2^3}{l_2} + \frac{2a_1(a_2^2 + a_4^2 + a_2 a_4)}{l_1}$$

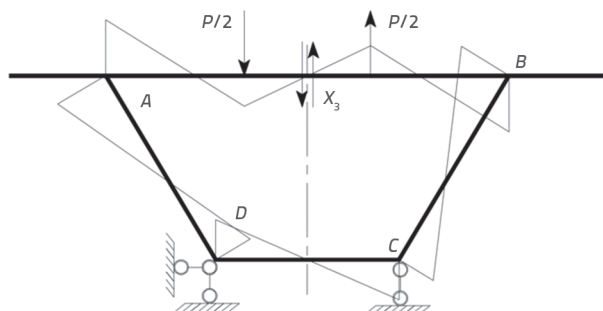
Ako je $X_1 = \eta_1 Th$, tada se η_1 može dobiti usporedbom izraza (1). X_1 označava antisimetričnu nepoznatu silu na gornjoj ploči osnovnog sustava pri rješavanju momenta savijanja okvira uzrokovanog posmičnom razlikom. Množenjem grafikona, horizontalni pomak, $\Delta_T(z)$, točke B okvira izračunan je pomoću izraza (2):

$$\Delta_T(z) = \left[\frac{a_1 \eta_1 (2a_2 + a_4) - 2a_1}{l_1} + \frac{a_2 (\eta_1 a_2 - 1)}{l_2} \right] \frac{h^2 T}{12E} \tag{2}$$

Izraz (2) može se ponovno napisati kao $\Delta_T(z) = TK_T$, pri čemu se K_T dobiva iz izraza (2) u kojoj je E modul elastičnosti ploče.

3.2. Unutarnja sila okvira i horizontalni pomak uzrokovan antisimetričnim opterećenjem P/2

Dijagram momenta savijanja okvira uzrokovan antisimetričnim opterećenjem P/2 upućuje na antisimetriju oko y-osi kao što je to prikazano na slici 6.



Slika 6. Moment savijanja okvira uzrokovan antisimetričnim opterećenjem

Moment savijanja, M_A , u točki A na slici 6. jednak je $(Pa - a_4 X_3) / 2$, a moment savijanja, M_D , u točki D jednak je $[2a_2 X_3 - (a_2 - a_4 + 2a)P] / 4$. X_3 , koji je izračunan pomoću izraza (3), primijenjen je za izračun antisimetrične nepoznate sile na gornjoj ploči osnovnog sustava pri određivanju momenta savijanja okvira pod antisimetričnim opterećenjem P/2.

$$X_3 = \left[\frac{a_1(a_2 a_4 - 6a a_2 - 6a a_2 + a_4^2 - 2a_2^2)}{2l_1} + \frac{a_2^2(a_2 - a_4 + 2a)}{2l_2} + \frac{a^2(3a_4 - 2a)}{l_4} \right] \frac{P}{\Gamma} \tag{3}$$

Ako je $X_3 = \eta_3 P$, onda se η_3 može dobiti iz jednadžbe (3). Ako je $X_1 = \eta_1 Th$, $X_3 = \eta_3 P$, a T označava jediničnu silu, tada se horizontalni pomak, $\Delta_p(z)$, točke B okvira uzrokovanog P/2 može dati izrazom:

$$\Delta_p(z) = \frac{Ph}{12E} \left\{ \eta_1 \eta_3 \left[\frac{2a_1(a_4^2 - a_2^2)}{l_1} - \frac{a_2^3}{l_2} + \frac{a_4(6a a_4 - 4a^2 - a_2^2)}{l_4} \right] \right. \\ \left. \eta_1 \left[\frac{a_2^2(a_2 - a_4 + 2a)}{2l_2} + \frac{a^2(2a - 3a_4)}{l_4} + \frac{a_1(a_4 - 2a_2 - 6a)(a_4 - a_2)}{2l_1} \right] \right. \\ \left. \eta_3 \left[\frac{a_1(a_4 + 2a_2)}{l_1} + \frac{a_2^2}{l_2} \right] + \frac{a_1(a_4 - 3a - a_2)}{l_1} + \frac{a_2(a_4 - 2a - a_2)}{2l_2} \right\} \tag{4}$$

Izraz (4) može se ponovno napisati kao $\Delta_p(z) = PK_p$, a K_p se može dobiti iz izraza (4).

Analiza je upozorila na odnos između horizontalnog pomaka okvira pod P/2 i posmične razlike T kao što je to prikazano na slici 4. Navedeni je odnos dan izrazom (5):

$$\Delta(z) = \Delta_p(z) + \Delta_T(z) \tag{5}$$

Izraz (5) također se može napisati kao $\Delta(z) = PK_p + TK_T$, a deriviranje tog izraza dva puta daje izraz (6):

$$\Delta''(z) = P''K_p + T''K_T \tag{6}$$

4. Ukupna potencijalna energija okvira i utvrđivanje diferencijalne jednadžbe

4.1. Energija deformacije poprečnog savijanja, Π_w

Pod kombinacijom antisimetričnog opterećenja P/2 i posmične razlike T, energija poprečne deformacije savijanja Π_w sandučastog nosača jedinične duljine sastavljena je od M_p i M_T koji označavaju momente savijanja poduprtog okvira pod P/2 i T. Energija deformacije poprečnog savijanja poduprtog okvira pod antisimetričnim opterećenjem izračunana je na sljedeći način.

4.1.1. Energija deformacije poprečnog savijanja okvira pod antisimetričnim opterećenjem P/2

Množenje dijagrama momenta okvira na slici 6. i uzimanje polovice vrijednosti daje izraz (7):

$$\int_s \frac{M_x^2}{2EI} ds = \frac{P^2}{12E} \left\{ \eta_2^2 \left[\frac{4aa_4(2a-a_4)+a_4^3}{2I_4} + \frac{a_1(a_2^2+a_2a_4+a_4^2)}{I_1} + \frac{a_2^3}{2I_2} \right] + \eta_3 \left[\frac{a_2^2(a_4-a_2-2a)}{2I_2} - \frac{a^2(a_4+2a)}{I_4} + \frac{a_1(a_4+2a_2)(a_4-a_2)-6aa_1(a_2+a_4)}{2I_1} \right] + \frac{a^3}{I_4} + \frac{a_1(a_2-a_4)(a_2-a_4+6a)+12aa_1a^2}{4I_1} + \frac{a_2(a_2-a_4)(a_2-a_4+4a)+4a^2a_2}{8I_2} \right\} \quad (7)$$

Desna strana izraza (7) može se ponovno napisati kao $P^2 K_{mp}$, pri čemu se K_{mp} dobiva iz izraza (7). I označava moment inercije svake ploče izvan ravnine, a put integracije s opseg je sandučastog presjeka.

4.1.2. Energija deformacije poprečnog savijanja okvira pod posmičnom razlikom T

Množenje dijagrama momenta okvira na slici 5. i uzimanje polovice vrijednosti daje izraz (8):

$$\int_s \frac{M_T^2}{2EI} ds = \frac{T^2 h^2}{12E} \left\{ \eta_1^2 \left[\frac{a_4^3}{2I_4} + \frac{a_2^3}{2I_2} + \frac{a_1(a_4^2+2a_2^2-2a_2a_4)}{2I_1} \right] + \frac{a}{2I_2} + \frac{a_1}{I_1} + \eta_1 \left[\frac{a_1(a_4-2a_2)}{I_1} - \frac{a_2^2}{I_2} \right] \right\} \quad (8)$$

Desna strana izraza (8) može se ponovno napisati kao $T^2 K_{mT}$, pri čemu se K_{mT} dobiva iz izraza (8).

4.1.3. Energija deformacije poprečnog savijanja okvira uzrokovana kombinacijom antisimetričnog opterećenja P/2 i posmične razlike T

Dijagrami momenata savijanja na slikama 5. i 6. množe se kako bi se dobio izraz (9):

$$\int_s \frac{M_1 M_2}{EI} ds = \frac{TPh}{12E} \left\{ \eta_1 \eta_3 \left[\frac{a_4(6aa_4-4a^2-a_4^2)}{I_4} + \frac{a_2^3}{I_2} - \frac{a_1(4a_2^2-2a_2^2-a_2a_4)}{2I_1} \right] + \eta_1 \left[\frac{a^2(2a-3a_4)}{I_4} - \frac{a_2^2(a_2-a_4+2a)}{2I_2} - \frac{a_1(6a-a_4+2a_2)(a_4-a_2)}{2I_1} \right] + \eta_3 \left[\frac{a_1(a_4+4a_2)}{2I_1} - \frac{a_2^2}{I_2} \right] + \frac{a_2(a_2-a_4+2a)}{2I_2} - \frac{a_1(3a+a_2-a_4)}{I_1} \right\} \quad (9)$$

Desna strana izraza (9) može se ponovno napisati kao TPK_{mPT} , pri čemu se K_{mPT} dobiva iz izraza (9). Energija deformacije poprečnog savijanja okvira može se izraziti pomoću izraza (10):

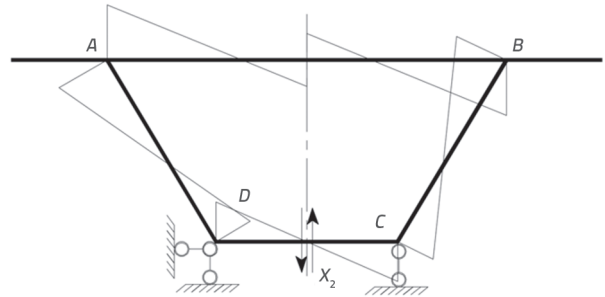
$$\Pi_w = P^2 K_{mp} + T^2 K_{mT} + TP K_{mPT} \quad (10)$$

4.2. Potencijalna energija vanjskog opterećenja, Π_p

U presjeku sandučastog nosača pod antisimetričnim opterećenjem došlo je do kutnog pomaka, $\theta(z)$. U ovome se radu navedeni pomak označava s θ . Kutni pomak, θ , poprečnog presjeka sandučastog nosača može se izračunati pomoću izraza (11):

$$\theta = \int_s \frac{(M_p + M_T) M_0}{EI} ds \quad (11)$$

pri čemu M_0 označava moment savijanja okvira koji stvara jedinični moment koji djeluje na srednji raspon gornje ploče okvira kao što je to prikazano na slici 7.



Slika 7. Moment savijanja okvira uzrokovan jediničnim momentom

Moment savijanja, M_A , u točki A na slici 7. jednak je $a_4 X_2 / 2 + (a_4 - a_2) / (2a_2)$, a M_D je jednak $a_2 X_2 / 2$. X_2 označava antisimetričnu nepoznatu silu na donju ploču u osnovnome sustavu pri rješavanju M_0 , a može se dobiti izrazom (12):

$$X_2 = \frac{a_1(2a_4^2 - a_2a_4 - a_2^2)}{a_2 I_1 \Gamma} + \frac{a_2^2(4a_4 - 5a_2)}{2a_2 I_4 \Gamma} \quad (12)$$

Ako je $X_2 = \eta_2$, zamjenom $X_3 = \eta_3 P$, $X_1 = \eta_1 T$, $X_2 = \eta_2$ u izraz (11) dobiva se izraz za θ :

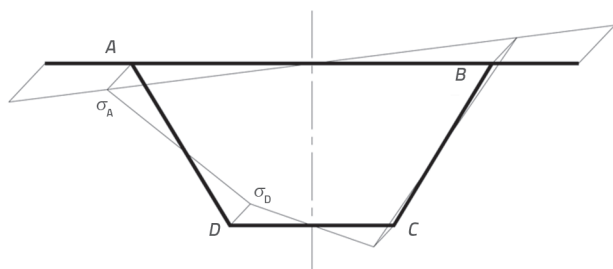
$$\theta = \frac{P}{24E} \left\{ \left[2a_4 \eta_2 \eta_3 (4a^2 - 6aa_4 + a_4^2) + 2a^2 \eta_2 (3a_4 - 2a) + 2a^2 (3a_4 - 3a_2 - 2a) + a_4 \eta_3 \left(\frac{8a^2}{a_2} + \frac{2a_4^2}{a_2} - \frac{12aa_4}{a_2} + 12a - 3a_4 \right) \frac{1}{I_4} + [(6a - a_4 - 4a_2 \eta_3) \frac{\eta_2 + 1}{a_2} + (1 - 2\eta_3)(2\eta_2 + 1)] \frac{a_1(a_4 - a_2)}{I_1} + \frac{a_2^2 \eta_2 (2a_2 \eta_3 - 2a + a_4 - a_2)}{I_2} \right] + \left[\frac{a_2^2 \eta_1 (3a_2 - 2a_2 - 2a_2 a_1 \eta_2)}{2a_2 I_4} + \frac{a_2^2 \eta_2 (1 - a_2 \eta_1)}{I_2} - \frac{1}{I_1} [2a_1 \eta_1 \eta_2 (a_4^2 - a_2 a_4 + a_2^2) + a_1 \eta_2 (a_4 - 2a_2)] + \frac{a_1(a_4 - a_2)(1 + 2\eta_1 a_4 - \eta_1 a_2)}{a_2} \right] \right\} \frac{hT}{12E} \quad (13)$$

Izraz (13) može se ponovno napisati kao $\theta = PK_{\theta p} + TK_{\theta T}$, pri čemu se $K_{\theta p}$ i $K_{\theta T}$ mogu dobiti iz jednadžbe (13). Dakle, potencijalna energija vanjskog opterećenja na okvir jednaka je $\Pi_p = -(P^2 K_{\theta p} + PK_{\theta T})e/2$.

4.3. Energija deformacije pri uzdužnome savijanju, Π_q

Energija deformacije pri uzdužnome savijanju sandučastog nosača jedinične duljine može se izraziti pomoću $\Pi_q = \int_{\Omega} \frac{\sigma^2}{2E} d\Omega$, a integral od Ω označava poprečni presjek svake ploče sandučastog nosača. Prema pretpostavkama u ovome istraživanju, distribucija normalnog naprezanja pri savijanju

na svakoj ploči prikazana je na slici 8. Zanemarujući utjecaj energije deformacije pri savijanju hrpta, energija deformacije pri savijanju okvira izračunava se pomoću izraza (14).



Slika 8. Raspodjela normalnog napreznja pri distorziji i savijanju

$$\Pi_q = \frac{[\Delta(z)]^2 E}{24(a_2 + a_4)\beta^2} [a_2^2 a_4^2 (t_4 a_4 + t_2 a_2 \beta^2) + t_4 d a_2^2 (3a_4^2 + 3a_4 d + d^2)] \quad (14)$$

U izrazu (14) σ_A i σ_D označavaju normalna napreznja pri distorziji i savijanju u kutnim točkama A i D. Ako su $\beta = \sigma_D / \sigma_A$ i $\Pi_q = K_q [\Delta(z)]^2$, onda se K_q može dobiti iz jednadžbe (14). Uvrštavanjem izraza (6) u izraz (14) dobiva se izraz za Π_q kao što je to prikazano u izrazu (15):

$$\Pi_q = K_q K_p^2 (P'')^2 + 2K_T K_p K_q P'' T'' + K_q K_T^2 (T'')^2 \quad (15)$$

4.4. Postavljanje i rješavanje diferencijalne jednadžbe

Kroz gore prikazanu analizu dobivena je jednadžba za ukupnu potencijalnu energiju okvira, koja uključuje energiju deformacije pri poprečnome savijanju, energiju deformacije pri savijanju i potencijalnu energiju vanjskog opterećenja.

$$\Pi = \Pi_w + \Pi_q + \Pi_p \quad (16)$$

Zamjena odgovarajućih izraza u jednadžbi (16) daje izraz (17):

$$\Pi = K_q K_T^2 (T'')^2 + 2K_T K_p K_q P'' T'' + T^2 K_{mT} + \frac{2PK_{mPT} - PeK_{\theta T}}{2} T + \frac{2K_{mp} - eK_{\theta T}}{2} P^2 + K_q K_p^2 (P'')^2 \quad (17)$$

Prema Eulerovoj formuli, diferencijalna se jednadžba može dobiti na sljedeći način:

$$T'''' K_q K_T + TK_{mT} + \frac{2PK_{mPT} - PeK_{\theta T}}{4} = 0 \quad (18)$$

Ako je $\lambda_1 = \left(\frac{K_{mT}}{4K_q K_T}\right)^{1/4}$, tada se izraz (18) može ponovno napisati kao (19):

$$T'''' + 4\lambda_1^4 T = \frac{eK_{\theta T} - 2K_{mPT}}{4K_q K_T} P \quad (19)$$

Ta je diferencijalna jednadžba slična diferencijalnoj jednadžbi savijanja grede na elastičnoj podlozi, a može se riješiti primjenom analognog rješenja za gredu na elastičnoj podlozi kada je $P(eK_{\theta T} - 2K_{mPT}) / (4K_q K_T)$ jedinično opterećenje. Oblik rješenja sličan je jednadžbi (20), gdje je $k = K_{mT} / K_T$. Posmična razlika, T , okvira pod jediničnim opterećenjem može se dobiti iz jednadžbe (20), a rezultat se množi s $P(eK_{\theta T} - 2K_{mPT}) / (4K_q K_T)$. Zato se posmična razlika poduprtog okvira pod antisimetričnim opterećenjem dobiva na sljedeći način:

$$T(z) = \frac{\lambda_1 e^{-\lambda_1 z}}{2k} [\cos(\lambda_1 z) + \sin(\lambda_1 z)] \quad (20)$$

Sandučasti je nosač imao $T(z) = 0$ na fiksnome kraju, jednostavno poduprti kraj s krutom dijafragmom i slobodni kraj s krutom dijafragmom. Nakon izračunavanja T može se dobiti poprečni moment okvira pod posmičnom razlikom. Superpozicijom s poprečnim momentom savijanja okvira pod antisimetričnim opterećenjem $P/2$ može se dobiti poprečni moment savijanja poduprtog okvira pod antisimetričnim opterećenjem.

5. Iskrivljeni poprečni moment savijanja okvira uzrokovan antisimetričnom obrnutom silom nosivosti

Pri izračunu poprečnog momenta savijanja okvira pod antisimetričnim opterećenjem na okvir bez oslonca dodana je zamjenjujuća sila. To je uzrokovalo pojavu poprečnog momenta savijanja okvira zbog distorzije. Kut distorzije, γ , označava promjenu kuta između hrpta i donje ploče u točki okvira D. Primjenjuje se za izražavanje momenta savijanja na kraju svake ploče. Ako su $M_A = k_1 \gamma$ i $M_D = k_2 \gamma$, s $k_1 = a_4 \eta_1 h^2 / K_T$ i $k_2 = (h^2 - a_2 \eta_1 h^2) / K_T$, tada se diferencijalna jednadžba, koja uključuje γ , može izraziti kao:

$$EI_{\omega D} \gamma'''' + EI_R \gamma = P_z F_s \quad (21)$$

U izrazu (21) $EI_{\omega D}$ označava krutost na savijanje pri distorziji, EI_R krutost bočnog okvira, $F_s = a_1(a_2 + a_4) / (2h)$, a P_z silu oslanjanja poduprtog okvira pod antisimetričnim opterećenjem. Rješenje te jednadžbe relativno je usavršeno, a pojedinosti o metodi početnog parametra mogu se dobiti iz literature. Zato u ovome radu nije prikazano rješenje.

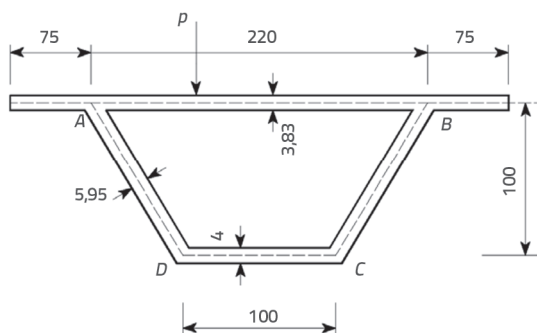
Nakon izračuna iskrivljenoga poprečnog momenta savijanja okvira on je superponiran s poprečnim momentom savijanja okvira s potporom pod antisimetričnim opterećenjem kao i s poprečnim momentom savijanja okvira s potporom pod pozitivnim simetričnim opterećenjem. Ta superpozicija rezultira konačnim poprečnim momentom savijanja okvira. Naime, moment savijanja izvan ravnine svake ploče u okviru, koji je generiran uklanjanjem oslonca i njegovom zamjenom obrnutom silom, mora se uzeti u obzir pri izračunavanju poprečnog momenta savijanja trapeznoga sandučastog nosača pod antisimetričnim opterećenjem. Međutim, pri izračunu poprečnog

momenta savijanja pravokutnoga sandučastog nosača moment savijanja izvan ravnine ne može se generirati zbog reakcije u obrnutome smjeru koja djeluje u ravnini hrpta. Zato se on ne razmatra. To je razlika između trapeznih i pravokutnih sandučastih nosača kada se navedenom metodom izračunava poprečni moment savijanja.

6. Numerički primjeri i parametarska analiza

6.1. Numerički primjeri

Numerički primjer 1: Ravnomjerno opterećenje s linearnim prirastom, $P = 1 \text{ kN/m}$, primijenjeno je na jednostavno poduprti sandučasti nosač trapeznog presjeka. Njegov izračunani raspon, L , bio je 1,2 m, njegov modul elastičnosti, E , bio je 2,8 GPa, a njegov Poissonov koeficijent μ , iznosio je 0,37.



Slika 9. Poprečni presjek numeričkog primjera 1. [mm]

Dimenzije presjeka prikazane su na slici 9., pri čemu je mjesto djelovanja P bilo 50 mm od točke A . Poprečni momenti savijanja kutnih točaka A , B , C i D sandučastog nosača izračunani su predloženom metodom i drugim metodama.

U tablici 1. navedeni su rezultati dobiveni predloženom metodom. Pri izračunu poprečnog momenta savijanja pod antisimetričnim opterećenjem antisimetrična obrnuta sila u osloncu uzrokovala je moment savijanja u svakoj ploči okvira (stavka ③ u tablici 1.). Zanemarivanje tog momenta savijanja uzrokuje veliku pogrešku, posebno u pogledu utjecaja kutnih točaka C i D . Za sandučasti nosač pravokutnoga poprečnog presjeka ta je vrijednost momenta savijanja jednaka nuli, dok se za sandučasti nosač trapeznog presjeka ta vrijednost momenta savijanja ne može zanemariti. Dijagram poprečnog momenta savijanja okvira za numerički primjer prikazan je na slici 10. Točke izračuna momenta savijanja na svakome kutu okvira i pozitivni ili negativni predznak momenta savijanja prikazani su na slici 10.

Krute potpore, analiza okvira i metode konačnih elemenata također su primijenjene za izračun poprečnih momenata savijanja okvira za sandučasti nosač u numeričkom primjeru 1., a usporedbe tih rezultata s rezultatima izračuna metode predložene u ovom radu prikazane su u tablici 2.

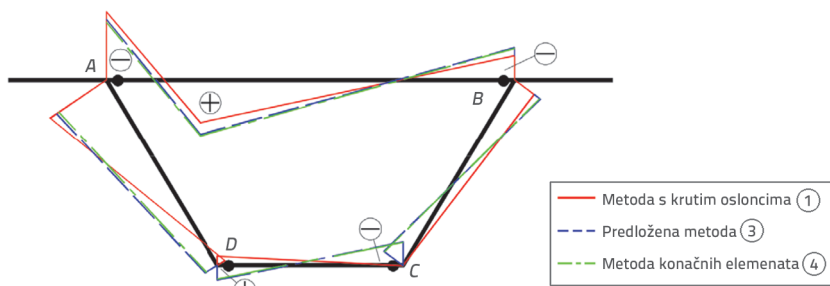
Točnosti različitih metoda primijenjenih za izračunavanje poprečne unutarnje sile sandučastog nosača razlikovale su se. Za ovaj su primjer izračuni modela konačnih elemenata upotrijebili modeliranje elementa ljuske.

Tablica 1. Rezultati poprečnog momenta savijanja izračunani predloženom metodom za numerički primjer 1.

Čvor okvira	A	B	C	D
Moment savijanja okvira uzrokovan pozitivnim simetričnim opterećenjem (s potporama) ①	-17,731	-17,731	-1,702	-1,702
Moment savijanja okvira uzrokovan antisimetričnim opterećenjem (s potporama) ②	-11,542	11,542	11,117	-11,117
Moment savijanja okvira uzrokovan antisimetričnim opterećenjem (bez potpora) ③	4,754	-4,754	-14,203	14,203
Moment savijanja okvira uzrokovan posmičnom razlikom, T ④	-0,073	0,073	0,073	-0,073
Iskrivljeni poprečni moment savijanja ⑤	1,474	-1,474	-4,400	4,400
Ukupni moment savijanja okvira (① + ② + ③ + ④ + ⑤)	-23,118	-12,344	-9,115	5,710
Sve vrijednosti momenta savijanja imaju jedinice $10^{-3} \text{ kN}\cdot\text{m/m}$.				

Tablica 2. Usporedba rezultata poprečnog momenta savijanja izračunanih različitim metodama za numerički primjer 1.

Čvor okvira	A	B	C	D
Moment savijanja okvira izračunan pomoću metode krute potpore [6, 12] ①	-26,120	-9,518	0,082	-3,441
Moment savijanja okvira izračunan pomoću metode analize okvira [6, 12] ②	-22,897	-12,741	-7,763	4,404
Moment savijanja okvira predloženom metodom ③	-23,118	-12,344	-9,115	5,710
Moment savijanja okvira izračunan metodom konačnih elemenata ④	-22,068	-12,108	-8,786	5,206
Pogreška 1 [%]: $[(② - ④) / ④] \times 100$	3,76	5,23	-11,64	-15,41
Pogreška 2 [%]: $[(③ - ④) / ④] \times 100$	4,76	1,95	3,74	9,68
Sve vrijednosti momenta savijanja imaju jedinice $10^{-3} \text{ kN}\cdot\text{m/m}$.				



Slika 10. Rezultati poprečnog momenta savijanja za numerički primjer 1

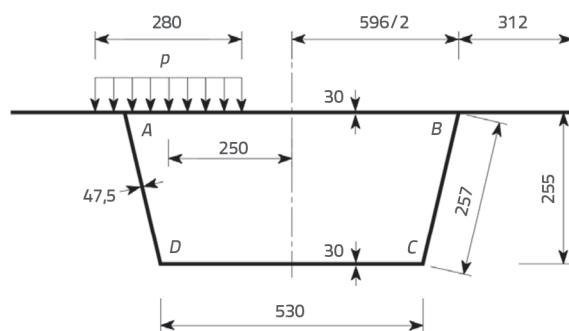
Metoda krutih oslonaca predstavlja pojednostavljenu i približnu metodu koja ne uzima u obzir moment savijanja generiran učinkom distorzije okvira te generira veliku pogrešku. Točnost metode analize okvira bila je znatno veća jer je uzela u obzir iskrivljeni poprečni moment savijanja. Međutim, i dalje je bilo velikih pogrešaka u rezultatima momenta savijanja za kutne točke C i D. Apsolutne vrijednosti tih pogrešaka bile su 11,64 % odnosno 15,41 %. Uglavnom, rezultati dobiveni predloženom metodom podudarali su se s rezultatima konačnih elemenata, a pogreška između njih bila je relativno mala. Na primjer, apsolutne vrijednosti pogrešaka momenta savijanja u točkama C i D iznosile su 3,74 % odnosno 9,68 %. Iako je pogreška momenta savijanja u kutu A bila nešto viša od one dobivene metodom analize okvira, pogreške na ostalim kutovima bile su manje, a ukupna točnost veća.

Numerički primjer 2: U drugome numeričkom primjeru kao predmet istraživanja primijenjen je dvokolosiječni željeznički sustav na čvrstoj podlozi koji je jednostavno poduprt na sandučasti nosač. Raspon izračuna bio je $L = 31,5$ m, modul elastičnosti $E = 34,5$ GPa, a Poissonov omjer iznosio je $\mu = 0,17$. Vlastita težina konstrukcije iznosila je $25,0$ kN/m³, korisno opterećenje pretvoreno je u poprečno opterećenje sandučastog nosača $P = 27,28$ kN/m², a njegova poprečna širina raspodjele iznosila je $2,8$ m. Presjek sandučastog nosača i raspodjela opterećenja prikazani su na slici 11.

Poprečni moment savijanja okvira uzrokovan ekscentričnim korisnim opterećenjem izračunan je metodom predloženom

u ovome istraživanju. U tablici 3. prikazani su rezultati istraživanja. Budući da je stalno opterećenje pozitivno simetrično, rezultati izračuna nisu zasebno navedeni. Pri izračunu poprečnog momenta savijanja okvira pod antisimetričnim opterećenjem moment savijanja svake ploče (stavka ③ u tablici 3.) u okviru bez potpore uzrokovanog obrnutom reakcijom u osloncu nije se mogao zanemariti. Na primjer, apsolutne vrijednosti momenta savijanja u točkama C i D dosegle su $6,139$ kN·m/m.

Ukupna vrijednost momenta savijanja generirana korisnim opterećenjem u tablici 3. dodana je vrijednosti stvorenoj stalnim opterećenjem sandučastog nosača kako bi se dobio ukupni poprečni moment savijanja sandučastog nosača pod stalnim i korisnim opterećenjima. U tablici 4. prikazani su ukupni rezultati poprečnog momenta savijanja dobiveni primjenom različitih metoda izračuna. U ovome primjeru model konačnih elemenata primjenjuje konačne elemente ljuske.



Slika 11. Poprečni presjek numeričkog primjera 2. (cm)

U tablici 4. prikazana je usporedba rezultata nekoliko metoda izračuna poprečne unutarnje sile. To upućuje na to da je pogreška metode analize okvira u kutnoj točki D iznosila $8,26$ %, a kod predložene metode $3,10$ %. Predložena metoda pokazuje manju pogrešku i veću točnost.

Tablica 3. Poprečni momenti savijanja pod korisnim opterećenjem izračunani predloženom metodom za numerički primjer 2

Čvor okvira	A	B	C	D
Moment savijanja okvira uzrokovan pozitivnim simetričnim opterećenjem (s potporama) ①	-15,855	-15,855	-0,531	-0,531
Moment savijanja okvira uzrokovan antisimetričnim opterećenjem (s potporama) ②	-11,357	11,357	0,474	-0,474
Moment savijanja okvira uzrokovan antisimetričnim opterećenjem (bez potpora) ③	4,986	-4,986	-6,139	6,139
Moment savijanja okvira uzrokovan posmičnom razlikom, T ④	-12,500	12,500	12,500	-12,500
Iskrivljeni poprečni moment savijanja ⑤	28,830	-28,830	-34,670	34,670
Ukupni moment savijanja okvira (① + ② + ③ + ④ + ⑤)	-5,896	-25,814	-28,366	27,304
Sve vrijednosti momenta savijanja imaju jedinice 10^{-3} kN·m/m.				

Tablica 4. Usporedba rezultata poprečnog momenta savijanja izračunanih različitim metodama za numerički primjer 2

Čvor okvira	A	B	C	D
Moment savijanja okvira izračunan pomoću metode krute potpore [6] ①	-316,220	-293,090	-157,340	-157,340
Moment savijanja okvira izračunan pomoću metode analize okvira [6] ②	-296,090	-313,220	-181,550	-133,130
Moment savijanja okvira predloženom metodom ③	-291,726	-311,644	-180,456	-126,786
Moment savijanja okvira izračunan metodom konačnih elemenata ④	-287,210	-306,050	-171,670	-122,970
Pogreška 1 [%]: $[(② - ④) / ④ \times 100]$	3,09	2,34	5,76	8,26
Pogreška 2 [%]: $[(③ - ④) / ④ \times 100]$	1,57	1,83	5,12	3,10
Sve vrijednosti momenta savijanja imaju jedinice 10^{-3} kN·m/m.				

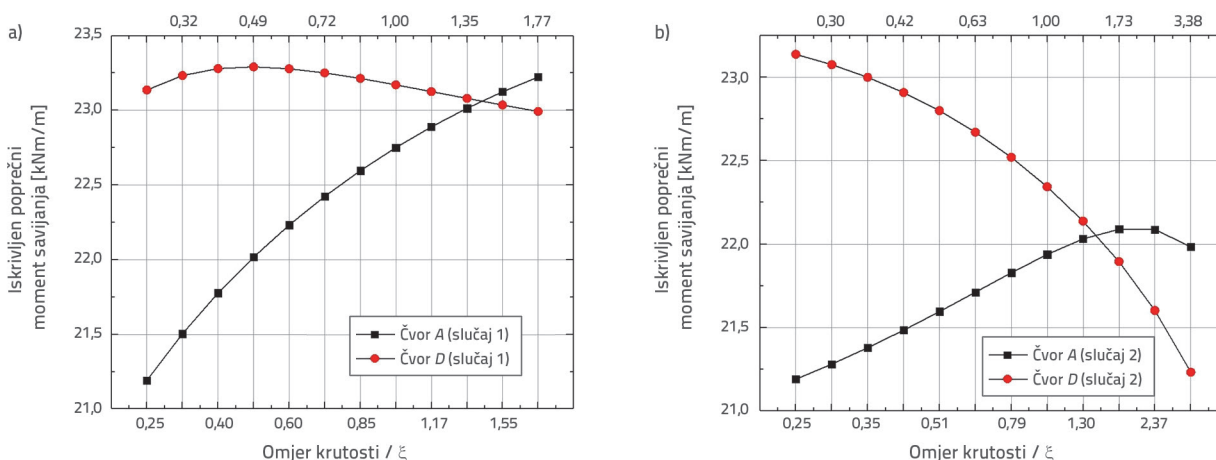
6.2. Utjecaj omjera krutosti na iskrivljeni poprečni moment savijanja

Parametri koji utječu na poprečnu unutarnju silu sandučastog nosača uključuju nagib hrpta i omjer visine i širine. Navedeno je već detaljno analizirano u literaturi [6]. Omjer krutosti gornje ploče i hrpta sandučastog nosača važan je čimbenik koji utječe na raspodjelu poprečne unutarnje sile na svakoj ploči sandučastog nosača. Zhao i sur. [3, 4] proučavali su učinak omjera linearne krutosti na raspodjelu poprečne unutarnje sile na svakoj ploči. Iskrivljeni poprečni moment savijanja važan je čimbenik koji utječe na točnost izračuna poprečne unutarnje sile sandučastog nosača. Zato se ovo istraživanje usredotočilo na analizu utjecaja promjene omjera krutosti gornje ploče i hrpta na distribuciju iskrivljenoga poprečnog momenta savijanja. Omjer krutosti između gornje ploče i hrpta definiran je kao $\xi = I_4^p / I_4^h$, a svaka ploča sandučastog nosača izrađena je od istog materijala. U ovome odjeljku slučaj 1. odnosi se na situaciju u kojoj se debljina gornje ploče mijenja, a debljina hrpta ostaje konstantna. Slučaj 2. odnosi se na situaciju u kojoj debljina gornje ploče ostaje konstantna, a debljina hrpta se mijenja. Na temelju numeričkog primjera 2. numeričke vrijednosti izračunane metodama analize okvira i utjecaj promjene omjera krutosti na iskrivljeni poprečni moment savijanja ispitani su za dva skupa radnih uvjeta. Iskrivljeni poprečni momenti savijanja kutnih

točaka B i C sandučastog nosača i kutnih točaka A i D bili su međusobno antisimetrični. Za ovo istraživanje učinci iskrivljenih poprečnih momenata savijanja u točkama A i D proučavani su radi uočavanja promjena u omjeru krutosti, ξ . Rezultati mogu odražavati utjecaj promjene omjera krutosti na distribuciju iskrivljenoga poprečnog momenta savijanja na svakoj ploči sandučastog nosača.

Rezultati prikazani na slici 12. odgovaraju inkrementalnim promjenama debljine od 0,025 m za ploču sandučastog nosača. Za slučaj 1. ξ je iznosio 0,25, 0,32, 0,40, 0,49, 0,60, 0,72, 0,85, 1,00, 1,17, 1,35, 1,55 i 1,77. Moment savijanja u kutu A postupno se povećavao s povećanjem ξ . Moment savijanja u kutu D prvo se postupno povećavao s povećanjem ξ , a zatim se postupno smanjivao. Za slučaj 2. ξ je bio 0,25, 0,30, 0,35, 0,42, 0,51, 0,63, 0,79, 1,00, 1,30, 1,73, 2,37 i 3,38. Moment savijanja u kutu A postupno se povećavao s povećanjem ξ . Međutim, kada je ξ dosegao 1,73, moment savijanja u kutu A počeo se smanjivati. Moment savijanja u kutu D postupno se smanjivao s povećanjem ξ .

Za slučaj 1. i 2. iskrivljeni poprečni moment savijanja u kutu A postupno se sveukupno povećavao s povećanjem ξ , dok se iskrivljeni poprečni moment savijanja u kutu D postupno sveukupno smanjivao s porastom ξ . Promjene u kutu A bile su uočljivije u slučaju 1. nego u slučaju 2., dok je trend promjene u kutu D bio suprotan od trenda u kutu A. Varijacija



Slika 12. Učinci promjena omjera krutosti na iskrivljeni poprečni moment savijanja: a) slučaj 1.; b) slučaj 2.

omjera krutosti utječe na raspodjelu momenta savijanja na svakoj ploči poprečnog presjeka sandučastog nosača, a moment savijanja raspoređen na ploču veće krutosti veći je od momenta za ploču manje krutosti. Analiza utjecaja promjena omjera krutosti na iskrivljeni poprečni moment savijanja može se neposredno odraziti utjecaj promjena omjera krutosti na distribuciju poprečne unutarnje sile na svaku ploču sandučastog nosača.

7. Zaključci

Ovaj rad primjenjuje princip varijacije energije umjesto drugih konvencionalnih metoda za izračunavanje poprečne unutarnje sile sandučastog nosača tankih stjenki pod ekscentričnim opterećenjima. Uzimajući u obzir utjecaj distorzije sandučastog nosača i primjenu posmične razlike gornje ploče kao nepoznate veličine u diferencijalnoj jednadžbi, numeričkom analizom i istraživanjem parametara u ovome su istraživanju dobiveni sljedeći rezultati:

- Za razliku od razmatranja vodoravnog pomaka gornje ploče sandučastog nosača kao nepoznate veličine, za analizu poprečne unutarnje sile u ovom je radu primijenjena kontrolna diferencijalna jednadžba četvrtog reda koja uzima u obzir posmičnu razliku gornje ploče kao nepoznatu veličinu. Rezultati numeričkog izračuna pokazuju da su rezultati te metode konzistentniji s rezultatima metode konačnih elemenata u usporedbi s ostalim metodama, s maksimalnom pogreškom koja ne prelazi 9,68 %.
- Predložena metoda istodobno uzima u obzir učinke distorzije sandučastog nosača i posmične razlike gornje ploče na poprečni moment savijanja pod antisimetričnim opterećenjem. Ukupna pogreška bila je mala, a točnost izračuna poprečne unutarnje sile sandučastog nosača veća.
- Pri primjeni te metode za analizu poprečne unutarnje sile sandučastog nosača s trapeznim poprečnim presjekom potrebno je uzeti u obzir moment savijanja izvan ravnine svake ploče dobiven uklanjanjem oslonca i njegovom zamjenom obrnutom reakcijom pod antisimetričnim opterećenjem. U suprotnom je pogreška velika, posebno za poprečni moment savijanja donje ploče.
- Promjene u omjeru krutosti između gornje ploče i hrpta sandučastog nosača znatno su utjecale na raspodjelu iskrivljenoga poprečnog momenta savijanja na svakoj ploči. Moment savijanja raspoređen na ploču veće krutosti bio je veći nego za ploču manje krutosti, a promjena momenta savijanja kuta A bila je uočljivija u slučaju 1. nego u slučaju 2., dok je trend u kutu D bio suprotan trendu u kutu A . Analiza poprečne unutarnje sile sandučastog nosača predstavljena u ovome radu može poslužiti kao referenca za buduće proračune sandučastog nosača.

Zahvale

Rad opisan u ovome istraživanju podržan je potporama Fonda za doktorska istraživanja Gradskog sveučilišta Lanzhou (br. potpore LZCU-BS2022-09). Zahvaljujemo LetPubu na lingvističkoj pomoći tijekom pripreme ovog rada.

LITERATURA

- [1] Stefanou, G.D., Dritsos, S., Bakas, G.J.: The effects of additional deformations in box-beam bridges on the longitudinal stresses and transverse moments, *Computers - Structures*, 16 (1983) 5, pp. 613–628, [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(83\)90110-4](https://doi.org/10.1016/0045-7949(83)90110-4)
- [2] Jia H.J., Dai H., Zhang J.D.: Research on transverse internal forces in box-girder bridges with corrugated steel webs, *Engineering Mechanics* 31 (2014) 12, pp. 76–81, <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2013.06.0530>
- [3] Zhao, P., Ye, J.S.: Frame analysis method of transverse internal force in bridge deck of box girders with corrugated steel webs, *Journal of Southeast University(Natural Science Edition)*, 42 (2012) 5, pp. 941–942, <https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-0505.2012.05.026>.
- [4] Zhao, P., Ye, J.S.: Transverse force study of single-box multichamber with corrugated steel webs, *Journal of Harbin Engineering University*, 39 (2018) 6, pp. 1109–1114, <https://doi.org/10.11990/jheu.201610073>
- [5] Li, Y.L., Yang, B.W., Zhang, J.D.: Transverse moment of PC single box-girder bridge with corrugated steel webs, *Journal of Central South University(Science and Technology)*, 47 (2016) 8, pp. 2802–2808, <https://doi.org/10.11817/j.issn.1672-7207.2016.08.035>
- [6] Wang, Y.S., Zhang, Y.H.: Research on transverse internal force and its parameter influence of thin-walled box girders with inclined webs, *Journal of the China Railway Society*, 39 (2017) 3, pp. 104–110, <https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-8360.2017.03.017>
- [7] Chithra, J., Nagarajan, P., Sajith, S.A.: Simplified method for the transverse bending analysis of twin-celled concrete box girder bridges, *Materials Science and Engineering*, 330 (2018) 012118, pp. 1–6, <https://doi.org/10.1088/1757-899X/330/1/012118>
- [8] Kurian, B., Menon, D.: Correction of errors in simplified transverse bending analysis of concrete box-girder bridges, *Journal of Bridge Engineering*, 10 (2005) 6, pp. 650–657, [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)1084-0702\(2005\)10:6\(650\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)1084-0702(2005)10:6(650))
- [9] Kurian, B., Menon, D.: Transverse bending analysis of concrete box girder bridges with flange overhangs. *Structural Engineering(Madra)*, 35 (2008) 3, pp. 173–179.
- [10] Rambo-Roddenberry, M., Kuhn, D., Tindale Jr., R.G.: Barrier effect on transverse load distribution for prestressed concrete segmental box girder bridges, *Journal of Bridge Engineering*, 21 (2016) 04016019, [https://doi.org/10.1061/\(asce\)be.1943-5592.0000814](https://doi.org/10.1061/(asce)be.1943-5592.0000814)

- [11] Zheng, Z.: Calculation method of the continuous rigid-frame curved box girder, *China Journal of Highway and Transport*, 13 (2000) 4, pp. 57–61, <https://doi.org/10.19721/j.cnki.1001-7372.2000.04.013>
- [12] Guo, J.Q., Fang, Z.Z., Zheng, Z.: Design theory of box bridges, Version 2, Beijing: China Communications Press, China, pp. 93–116 (2008).
- [13] Zhong, X.G., Shu, X.J., Zhang, H.Y.: Finite element analysis on transversal frame–effect of prestressed concrete box–girder bridge, *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 30 (2013) 4, pp. 549–552, <https://doi.org/10.7511/jslx201304016>.
- [14] Zhang, H., Zheng, H., Wang, M.: Experimental study on transverse mechanical behaviour of precast segmental composite box girder bridge with corrugated steel webs, *Journal of Southeast University(Natural Science Edition)*, 46 (2016) 5, pp. 1070–1075, <https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-0505.2016.05.029>
- [15] Recupero, A., Granata, M.F., Culotta, G., Arici, M.: Interaction between longitudinal shear and transverse bending in prestressed concrete box girders *Journal of Bridge Engineering*, 22 (2016) 04016107, [https://doi.org/10.1061/\(asce\)be.1943-5592.0000990](https://doi.org/10.1061/(asce)be.1943-5592.0000990).
- [16] Wang, Z.N., Zhang, Y.H.: Research on transverse internal force of single box double cell composite box girder with corrugated steel webs. *Journal of the China Railway Society*, 41 (2019) 12, pp. 106–112, <https://doi.org/10.3969/j.issn.1001-8360.2019.12.014>
- [17] Zhang, Y.H., Liu, Z.X., Lin, L.X., Zhou, M.D.: Analysis on distortion effect of thin-walled box girders based on principle of stationary potential energy *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 47 (2016) 10, pp. 3461–3468, <https://doi.org/10.11817/j.issn.1672-7207.2016.10.024>
- [18] Xu, X., Qiang, S.Z.: Research on distortion analysis theory of thin-walled box girder, *Engineering Mechanics*, 30 (2013) 11, pp. 192–200, <https://doi.org/10.6052/j.issn.1000-4750.2012.07.0554>.
- [19] Ji, W., Shao, T.Y.: Finite element model updating for improved box girder bridges with corrugated steel webs using the response surface method and Fmincon algorithm, *KSCE Journal of Civil Engineering*, 25 (2021) 2, pp. 586–602, <https://doi.org/10.1007/s12205-020-0591-3>