DOI: https://doi.org/10.14256/JCE.1881.2016

Građevinar 8/2020

Primljen / Received: 21.9.2016.
Ispravljen / Corrected: 24.2.2020.
Prihvaćen / Accepted: 20.5.2020.
Dostupno online / Available online: 10.9.2020.

Proračun pomičnih okvirnih konstrukcija modificiranim Crossovim postupkom

Autor:

Mr.sc. **Alen Stupar**, dipl.ing.građ.
Device Solution Laboratory (DSLab)
– Technisches Büro München
a.stupar@dslab.de
Autor za korespodenciju

Prethodno priopćenje

Alen Stupar

Proračun pomičnih okvirnih konstrukcija modificiranim Crossovim postupkom

U radu je prikazan izvorni postupak statičkoga proračuna pomičnih ravninskih okvirnih konstrukcija. Prikazani proračunski postupak izveden je modificiranjem klasičnoga Crossova postupka (KCP). Uvedenom modifikacijom KCP-a postignuto je znatno poboljšanje proračunskoga algoritma pomičnih okvirnih konstrukcija u odnosu na KCP, posebice u pogledu uklanjanja potrebe za provedbom većega broja pojedinačnih iteracijskih postupaka i uklanjanja potrebe za rješavanjem sustava linearnih algebarskih jednadžbi.

Ključne riječi:

numerička analiza, relaksacijski postupak, Crossov postupak, razdjelni koeficijent, prijenosni koeficijent, ravninska okvirna konstrukcija

Research paper

Alen Stupar

Design of movable frame structures using modified Cross procedure

An original procedure for static design of movable in-plane frame structures is presented in the paper. The presented design procedure was derived using the modified traditional Cross procedure (TCP). The introduction of the TCP modification has resulted in significant improvement of the design algorithm of movable frame structures as compared to TCP, especially as to elimination of the need to conduct greater number of individual iteration procedures, and to solve linear algebraic equation systems.

Key words:

numerical analysis, relaxation procedure, Cross procedure, division coefficient, transfer coefficient, in-plane frame structure

Vorherige Mitteilung

Alen Stupar

Berechnung beweglicher Rahmenstrukturen nach modifiziertem Cross-Verfahren

In dieser Arbeit wird das ursprüngliche Verfahren zur statischen Berechnung beweglicher planarer Rahmenstrukturen vorgestellt. Das vorgestellte Berechnungsverfahren wurde durch Modifizieren des klassischen Cross-Verfahrens (KCP) durchgeführt. Die eingeführte Modifikation des KCP erreichte eine signifikante Verbesserung des Berechnungsalgorithmus für bewegliche Rahmenstrukturen in Bezug auf KCP, insbesondere im Hinblick auf die Beseitigung der Notwendigkeit, eine größere Anzahl einzelner iterativer Verfahren durchzuführen, und der Notwendigkeit, Systeme linearer algebraischer Gleichungen zu lösen.

Schlüsselwörter:

numerische Analyse, Relaxationsverfahren, Cross-Verfahren, Verteilungskoeffizient, Übertragungskoeffizient, planare Rahmenstruktur

1. Uvod

U vremenu kada osobna računala nisu bila u širokoj uporabi proračunski postupci za statičku analizu štapnih statičkih sistema temeljili su se na inženjerskoj metodi pomaka. No, taj proračunski postupak, u kojem su nepoznanice vrijednosti neovisnih poopćenih pomaka sistema, primijenjen na sisteme s velikim brojem čvorova vodio je k matematičkom problemu sustava linearnih algebarskih jednadžbi. Primjerice, za proračun višepoljnih i višeetažnih okvirnih konstrukcija taj postupak često dovodi do sustava od više desetaka jednadžbi te je za inženjersku praksu kao matematički problem u postupku rješavanja predstavljao vrlo mukotrpan i dugotrajan posao. Stoga je razvoj proračunskih postupaka krenuo u smjeru nalaženja alternativnih putova rješavanja jednadžbi inženjerske metode pomaka, u kojima bi se zaobišla potreba rješavanja velikoga sustava linearnih algebarskih jednadžbi, što je iznjedrilo nekoliko postupaka u kojima su se sustavi jednadžbi rješavali iteracijski, postupnim dolaskom do konačnih rezultata.
Pionirski rad u toj grupi iteracijskih proračunskih postupaka bio je rad K. Čališeva [1, 2], opisan u [3, 4], u kojemu se primjenom postupnih aproksimacija rješavaju sustavi jednadžbi tako da se u tekućem koraku proračuna svaki promatrani čvor uravnotežuje zaokretanjem samo toga čvora, pri čemu se ne nalazi neposredno vrijednost momenta zbog tog zaokreta, nego se momenti u presjecima štapnih elemenata određuju naknadno na temelju konačnih vrijednosti zaokreta čvorova. Taj se postupak primjenjuje na sve čvorove sistema u broju ciklusa potrebnom za postizanje rješenja zadovoljavajuće točnosti.
Ideju gotovo jednaku Čališevljevoj prikazao je H. Cross u iteracijskoj metodi raspodjele momenata [5, 6], opisanoj u [7, 8], s tom razlikom da je iz postupka postupnih aproksimacija uklonio potrebu za utvrđivanjem vrijednosti zadavanoga prirasta kuta zaokreta promatranoga čvora, te su u postupku iskazane samo vrijednosti ostvarenih prirasta momenata zbog zadanoga prirasta kuta, dobivene s pomoću razdjelnih i prijenosnih koeficijenata.
U radu P. Csonke [9] prikazana je metoda (opisana u [8, 10-12]) za translacijski pomične okvirne konstrukcije, utemeljena na Crossovoj metodi, s pomoću koje se postiže znatno ubrzanje Crossovoga postupka za određenu podvrstu toga tipa konstrukcija. Postupak ubrzavanja Crossovoga postupka gotovo jednak postupku P. Csonke neovisno je kreirao O. Werner 1951. godine u Zagrebu (opisano u [8, 10, 11]).
G. Kani je u radu [13] prikazao iteracijsku metodu jednostruke iteracije, utemeljenu na Ostenfeldovoj formulaciji inženjerske metode pomaka, a primijenjenu na proračun translacijski pomičnih okvirnih konstrukcija.
Rad prikazan u ovom članku također je iteracijski postupak rješavanja jednadžbi inženjerske metode pomaka, koji se nastavlja na metodu Crossa za translacijski pomične okvirne konstrukcije, u kojem su uvedene izmjene i dopune izvornoga postupka dovele do pojednostavnjenja i ubrzanja izvornoga postupka.

2. Postojeće iteracijske metode

2.1. Klasični Crossov postupak za translacijski nepomične sisteme

Klasični Crossov postupak (KCP) proračunski je postupak statičke analize ravninskih štapnih konstrukcija koji se ubraja u skupinu relaksacijskih postupaka. Postupak je iteracijskoga karaktera i u svojoj matematičkoj osnovi, u izvornoj inačici [5, 6], a prema [7], predstavlja inkrementalni oblik Jacobijevoga iterativnog postupka rješavanja sustava *n* linearnih algebarskih jednadžbi s *n* nepoznanica, u kojemu se istodobno zadaju prirasti kutova zaokreta u svim čvorovima sistema, a ostvareni preneseni prirasti momenata u susjednim presjecima unose se u sljedeći korak iteracije. Takva se inačica KCP-a sve do današnjih dana upotrebljava na području SAD-a [14-16] i mnogih drugih zemalja. U Europi se Crossov postupak rabi pretežito u inačici u kojoj se u tekućem koraku iteracije, rješavajući sistem "čvor po čvor", dobiveni preneseni momenti odmah, u istom iteracijskom koraku, unose u proračun uravnoteženja za ostale čvorove kojima u tekućem iteracijskom koraku još nije zadan uravnotežavajući prirast kuta zaokreta. Ta je inačica Crossova postupka inkrementalni oblik Gauss-Seidelovoga iterativnog postupka.
Zamisao je postupka da se ravnoteža sistema postiže postupno, tako da se početni neuravnoteženi momenti u pojedinom čvoru uravnotežuju momentima izazvanim prisilnim zaokretanjem toga čvora, pri čemu se svi ostali čvorovi sistema u toj proračunskoj fazi drže nepomičnima u odnosu na zaokretanje.
Postupak se provodi uzastopce, čvor po čvor, tako da se u svakom koraku postupka na taj način redom uravnoteže svi čvorovi sistema. Zaostali neuravnoteženi momenti svakoga koraka iteracije preneseni su momenti sa susjednih čvorova sistema, koji se, ovisno o inačici postupka, ili uvode odmah u proračun u istom koraku iteracije ili uravnotežuju u sljedećem koraku. Aproksimacija vrijednosti momenta savijanja na kraju i proizvoljnoga štapnog elementa *i-j* u *s*-tom koraku dobiva se prema izrazu:

$$M_{i,j}^{(s)} = \overline{M}_{i,j} + \sum_{k=1}^{s} \mu_{i,j} \cdot M_i^{(k)} + p \cdot \sum_{k=1}^{s-1} \mu_{j,i} \cdot M_j^{(k)} \tag{1}$$

gdje su: $\overline{M_{i,j}}$ vrijednost momenta upetosti na kraju *i* promatranoga štapnog elementa *i-j* izazvanoga vanjskim opterećenjem, $\mu_{i,j}$ vrijednost Crossovoga razdjelnog koeficijenta za kraj *i* štapnoga elementa *i-j*, $M_i^{(k)}$ vrijednost sumarnoga neuravnoteženog momenta u čvoru *i* ravninske konstrukcije u *k*-tom koraku iteracije, *p* vrijednost Crossovoga prijenosnog koeficijenta koji je konstatnog iznosa, p = 0,5, $\mu_{j,i}$ vrijednost Crossovoga razdjelnog koeficijenta za kraj *j* štapnog elementa *i-j*, $M_j^{(k)}$ vrijednost sumarnoga neuravnoteženog momenta u čvoru *j* okvirne konsrukcije u *k*-tom koraku iteracije.
Vrijednost Crossovoga razdjelnog koeficijenta za proizvoljni presjek *i-j* proizvoljnoga čvora *i* štapnog sistema dobiva se prema izrazu

$$\mu_{i,j} = -\frac{k_{i,j}}{\sum_j k_{i,j}} \tag{2}$$

gdje su: $k_{i,j} = \frac{EI_{i,j}}{L_{i,j}}$ krutost štapnoga elementa *i-j* ($EI_{i,j}$ je umnožak modula elastičnosti i aksijalnoga momenta tromosti presjeka štapnoga elementa *i-j*, a $L_{i,j}$ duljina štapnoga elementa *i-j*), a $\sum_j k_{i,j}$ zbroj krutosti svih štapnih elemenata koji su priključeni u promatrani čvor *i*.

Iteracija se završava kada je zadovoljen zadani kriterij točnosti rješenja da je vrijednost svih prenesenih momenata *s*-toga koraka iteracije manja od unaprijed zadane vrijednosti ε:

$$p \cdot \mu_{j,i} \cdot M_j^{(s)} < \varepsilon \tag{3}$$

za svaki $\mu_{j,i}$ $M_j^{(s)}$ sistema.

KCP je dugo godina bio vrlo moćan proračunski aparat za statički proračun ravninskih štapnih konstrukcija, budući da je iz proračuna uklonjena potreba za rješavanjem sustava linearnih algebarskih jednadžbi s velikim brojem nepoznanica, te se cijeli postupak svodi na jednostavne aritmetičke operacije množenja s razdjelnim i prijenosnim koeficijentama i zbrajanja vrijednosti pojedinih koraka iteracije.

Iako se u današnje vrijeme, kada su proračunski postupci za statički proračun ravninskih štapnih konstrukcija u pravilu utemeljeni na matričnoj formulaciji metode konačnih elemenata, KCP rijetko primjenjuje u statičkom proračunu ravninskih štapnih sistema, on ipak još uvijek predstavlja učinkovit alat za proračun jednostavnijih okvirnih konstrukcija i na razmjerno jednostavan način može poslužiti kao algoritamska baza za formiranje računalnih programa za proračun okvirnih konstrukcija, bez potrebe za uporabom nekoga od suvremenih komercijalnih računalnih programa za statičku analizu konstrukcija.

KCP je sve do današnjih dana ostao nezaobilazna tema mnogobrojnih studijskih programa iz područja proračuna ravninskih štapnih konstrukcija na studijima građevinarstva širom svijeta. Primjerice, studijski programi studija građevinarstva u SAD-u po A. Kassimaliju (2011.) [14], R. C. Hibbeleru (2009.) [15], po K. M. Leetu, C. M. Uangu i A. M. Gilbertu (2008.) [16] samo su neki od mnogobrojnih studijskih programa koji kao nezaobilaznu temu obrađuju KCP. U Republici Hrvatskoj, primjerice studijski programi predmeta iz područja proračun građevinskih konstrukcija Građevinskoga fakulteta Sveučilišta u Zagrebu također sadrže u sebi kao nezaobilaznu temu proračun po KCP-u, a u manje-više identičnom obliku u odnosu na sadržaj udžbenika M. Anđelića [8].

2.2. Klasični Crossov postupak za translacijski pomične sisteme

Izvorni algoritam KCP-a oblikovan je za potrebe proračuna translacijski nepomičnih ravninskih štapnih sistema (u smislu inženjerske metode pomaka): kontinuirane grede, nepomične okvirne konstrukcije i slično.

Iako je iteracijski postupak proračuna konstrukcija KCP-om inženjerskoj praksi donio jednostavan proračunski aparat u postupku statičkog proračuna translacijski nepomičnih konstrukcija, u kojemu je manipulacija ulaznim podacima problema svedena na ograničeni niz jednostavnih algebarskih operacija koje se ponavljaju sve do po volji zahtijevanoga stupnja točnosti rješenja, a bez potrebe za rešavanjem ikakvih matematičkih jednadžbi, nedostatak je postupka ipak taj što se on ne može u izvornom obliku primijeniti na translacijski pomične sisteme, primjerice na ravninske okvirne konstrukcije.

S tim u vezi razvijen je proračunski postupak u kojem se Crossov izvorni postupak upotrebljava kao osnova za proračun translacijski pomičnih sistema. Ideja je da se najprije na potpuno pridržanom sistemu, u kojemu su pridržani i zaokreti čvorova i svi neovisni translacijski pomaci sistema, za vanjsko opterećenje provede postupak po Crossu i odrede momenti koji su u svim čvorovima uravnoteženi. Pri tome se iz ravnoteže sila izoliranih dijelova sistema proračunaju i vrijednosti pridržajnih sila u dodanim pridržanjima.

Nakon toga se, jedan po jedan, na pridržanu konstrukciju kao zadano opterećenje zadaju prisilni pomaci koji odgovaraju nepoznatim translacijskim pomacima sistema, proračunavaju se momenti upetosti za takav prisilni pomak, te se za tako dobivene momente upetosti ponovno provede postupak po Crossu, dobe novi uravnoteženi momenti i nove pridržajne sile. Pri tome, kako su translacijski pomaci nepoznanice, i dobiveni momenti i pridržajne sile u sebi će sadržavati taj nepoznati translacijski pomak kao nepoznati faktor. Taj se postupak provodi redom za svaki pojedinačni nepoznati translacijski pomak. Na taj način se dobiva *n*+1 pojedinačna Crossova iteracija, gdje je *n* broj neovisnih nepoznatih translacijskih pomaka sistema .

Ukupni moment u pojedinom presjeku dobiva se zbrajanjem momenata od svih pojedinačnih *n*+1 utjecaja, ukupne pridržajne sile, kojih je jednak broj kao nepoznatih translacijskih pomaka, dobivaju se također zbrajanjem rezultata iz svih pojedinačnih iteracija. Na taj način svaka pridržajna sila u sebi sadrži *n* nepoznanica – vrijednosti translacijskih pomaka sistema.

Budući da u izvornoj konstrukciji ne postoje nikakva pridržanja, konačni rezultat za svaku pridržajnu silu mora dati vrijednost 0. Time sustav izraza za pridržajne sile postaje sustav *n* algebarskih jednadžbi s *n* nepoznanica: *n* nepoznatih translacijskih pomaka sistema. Rješavanjem tog sustava dobivaju se vrijednosti traženih translacijskih pomaka koje se uvrštavaju u konačne vrijednosti za momente te dobivaju konačna rješenja.

Primjena takvoga postupka na konstrukcije u kojima utjecaj translacijskih pomaka nije zanemariv, konkretno na proračun višeetažnih pomičnih okvirnih konstrukcija, kao jednog od najčešćih oblika konstrukcija visokogradnje, dovodila je do potrebe za dugotrajnim provođenjem više pojedinačnih Crossovih iteracijskih postupaka, te dodatno do potrebe rješavanja sustava linearnih algebarskih jednadžbi u kojima su nepoznanice vrijednosti neovisnih translacijskih pomaka sistema, čime je, vrlo često, proračunski postupak postajao dugotrajan i mukotrpan, a pri tome je poništena glavna

prednost izvornoga Crossova postupka, uklanjanje potrebe za rješavanjem sustava linearnih algebarskih jednadžbi.
U [8, 14-16] detaljno je opisan postupak proračuna višeetažnih pomičnih ravninskih okvirnih konstrukcija primjenom KCP-a.

2.3. Postupak Csonke i Wernera

Za potrebe ubrzavanja KCP-a primijenjenoga u rješavanju translacijski pomičnih okvirnih konstrukcija, kao što je rečeno, neovisno jedan od drugoga P. Csonka i O. Werner razvili su gotovo istovjetne postupke, u kojim se za okvirne konstrukcije s *n* etaža zaobilazi potreba naknadnoga provođenja *n* pojedinačnih Crossovih iteracija, te se taj dio zamjenjuje izvornim algoritmom u kojem se utjecaj svih translacijskih pomaka konstrukcije određuje kao utjecaj horizontalnih sila postavljenih u ravninama greda okvira, čiji je iznos istovjetan, a smjer suprotan dobivenim pridržajnim silama iz Crossovoga početnog iteracijskog postupka za vanjsko opterećenje.
U postupku se najprije uvodi pretpostavka da su kutovi zaokreta svih čvorova iste etaže okvirne konstrukcije međusobno jednaki te se na temelju te pretpostavke oblikuje konstrukcija zamjenjujućega poluokvira s *n* etaža, opterećena navedenim horizontalnim silama, u kojoj su krutosti elemenata poluokvira izvedene odgovarajućim zbrajanjem krutosti odgovarajućih elemenata izvornoga okvira.
Kod poluokvira se pridržavaju kutovi zaokreta čvorova, ali se ne pridržavaju translacijski pomaci etaža.
Iz uvjeta iščezavanja poprečnih sila u stupovima poluokvira iz jednadžbi inženjerske metode pomaka uklanjaju se nepoznati kutovi zaokreta stupova, te se, jednako kao kod Crossa, uravnotežavanje momenata postiže zadavanjem kuta zaokreta promatranoga čvora, dok se ostali čvorovi pri tome ne zaokreću.
Zbog činjenice da se postupak proračuna utjecaja horizontalnih sila (a time i utjecaja translacijskih pomaka etaža) provodi na sistemu u kojemu nisu spriječeni translacijski pomaci, razdjelni koeficijenti ovoga postupka ne dobivaju se na isti način kao kod KPC-a, niti su prijenosni koeficijenti jednaki kao kod KPC-a.
Prijenosni je koeficijent za stupove uvijek $p = -1,0$ (osim za slučaj zglobnih ležajeva konstrukcije, u kojemu je $p = 0$), dok je za grede $p = 0$.
Nakon provedenoga iteracijskog postupka po Csonki i Werneru dobiveni se uravnoteženi momenti u presjecima zamjenjujućega poluokvira raspodjeljuju natrag u presjeke izvornoga poluokvira tako da svakom presjeku pripada onoliki udio momenta poluokvira koji na adekvatan način odgovara krutosti štapnoga elementa kojemu presjek pripada.
Zbog pogrešne pretpostavke na kojoj počiva ovaj postupak – da su kutovi zaokreta svih čvorova iste etaže međusobno jednaki – momenti u presjecima izvornoga okvira neće biti, osim u posebnim slučajevima, uravnoteženi u čvorovima, pa zbog toga treba ponovno provesti postupak KCP, i to na sistemu u kojemu su pridržani i translacijski pomaci, radi postizanja ravnoteže momenata u pojedinačnim čvorova. Ta nova iteracija KCP daje nove vrijednosti pridržajnih sila, koje bi trebale davati vrijednost 0. No, budući da postupak KCP ne čuva ravnotežu horizontalnih sila, te vrijednosti općenito neće biti 0, pa se formira novi sustav horizontalnih sila istoga iznosa, a suprotnoga smisla tim pridržajnim silama, te se za njih ponovno provodi postupak po Csonki i Werneru.
Ta uzastopna izmjena postupaka KCP te Csonke i Wernera u teoriji traje dok se ne postigne zadovoljavajuća točnost ravnoteže momenata u čvorovima i zadovoljavajuća ravnoteža horizontalnih sila.
Radi smanjenja broja naizmjeničnih ciklusa KCP i postupka po Csonki i Werneru, autori predlažu, ako je zadovoljen uvjet afinosti dijagrama poprečnih sila u stupovima poluokvira za fazu prije postupka Csonke i Wernera i za fazu nakon drugoga KCP, uvođenje korekcijskoga faktora u koji ulaze zbrojevi umnožaka poprečnih sila i visina pojedinih etaža. Konačne vrijednosti momenata dobivaju se zbrajanjem vrijednosti iz prvoga KCP-a i vrijednosti iz drugoga KCP-a pomnožene korekcijskim faktorom.
Prednost je postupka po Csonki i Werneru ta da je uklonjena potreba za rješavanjem sustava linearnih algebarskih jednadžbi, uklonjene su vrijednosti translacijskih pomaka kao cilj proračuna, a postupak se ponovno svodi na jednostavne aritmetičke operacije.
Nedostatak je tog postupka taj da je i u području primjene na okvirne konstrukcije primijenjiv samo za konstrukcije koje imaju iste visine stupova u svakoj etaži, koji imaju iste ležajeve stupova prve etaže i koje nemaju zglobnih spojeva u štapnim elementima okvira.
Detaljan opis postupka dan je u [8, 10-12].

2.4. Kanijev postupak

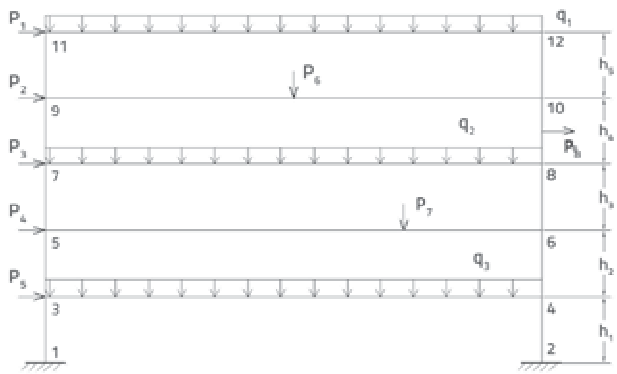
Za potrebe proračuna višeetažnih translacijski pomičnih okvirnih konstrukcija Gaspar Kani [13] kreirao je iteracijski postupak jednostruke iteracije u kojem se izmijenjuju ciklusi određivanja uravnoteživajućih momenata oko čvorova sistema zadavajući, čvor po čvor, odgovarajuće kutove zaokreta s ciklusima određivanja momenata u stupovima nastalih zbog translatcijskih pomaka grednih pojaseva etaža okvira.
Kani u svom iteracijskom postupku ravnotežu postiže na sistemu kojem su pridržani samo kutovi zaokreta čvorova, a nisu pridržani translacijski pomaci okvirne konstrukcije.
Slično kao i kod KCP-a za potrebe određivanja uravnotežavajućih momenata oko pojedinačnoga čvora Kani uvodi razdjelne koeficijente pomoću kojih se dobivaju uravnotežavajući momenti koji se dobivaju na drugačiji način nego u KCP-u, a za razliku od KCP-a ne koristi se prijenosnim koeficijentom, nego se utjecaj prenesenih momenata unosi u konačni zbroj tako da se pribroji vrijednost momenta na suprotnom kraju štapnoga elementa.
Utjecaj translacijskih pomaka grednih pojaseva konstrukcije Kani određuje pomoću "translacijskoga razdjelnog koeficijenta" koji se oblikuje za svaki stup svake etaže iz uvjeta uravnotežavanja horizontalnih sila pojedinačnoga izoliranog dijela (dobivenoga presijecanjem svih stupova promatrane etaže ispod greda

te etaže). Momenti u stupovima pojedine etaže dobijaju se množenjem "translacijskoga razdjelnog koeficijenta" promatranoga stupa sa zbrojem momenata svih stupova promatrane etaže.
Razlika između Kanijevoga postupka KCP-a je, između ostalog, i u tome da Kani provodi "potpunu iteraciju" u kojoj se u postupku proračunavaju konačne vrijednosti momenata koje teže k traženoj vrijednosti, dok je KCP "diferencijska iteracija" u kojoj se proračunavaju prirasti momenata koji teže k nuli.
Velika je prednost Kanijevoga postupka ta da se do konačnoga rješenja dolazi unutar samo jednoga iteracijskog postupka, izbacivši u potpunosti potrebu proračunavanja pridržajnih sila i bez rješavanja sustava algebarskih jednadžbi.
U odnosu na postupak po Csonki i Werneru Kanijev postupak nema nikakvih ograničenja na visinu stupova prve etaže okvirne konstrukcije, u kojoj stupovi mogu biti po volji različite visine, niti ima ikakvoga ograničenja na vrstu ležajeva stupova prve etaže, u kojoj ležajevi mogu biti i kombinacija krutih spojeva sa zglobnim ležajevima.
Zbog potrebe provođenja naizmjeničnih ciklusa uravnoteživanja momenata u čvorovima pomoću razdjelnih koeficijenata i uravnoteživanja horizontalnih sila pomoću translacijskih razdjelnih koeficijenata postupak je nešto nepregledniji od izvorne inačice KCP-a.
Kanijev je postupak detaljno opisan u [17].

3. Modifikacija Crossova postupka

3.1. Momenti upetosti modificiranoga Crossova postupka

Prilikom oblikovanja modificiranog algoritma upotrijebljene su istovjetne proračunske pretpostavke koje su upotrijebljene i pri oblikovanju izvornoga Crossova proračunskog algoritma: ravnoteža se postiže na nedeformiranom sistemu, zanemaruje se utjecaj translacijskih pomaka izazvanih promjenama duljina štapnih elemenata sistema, zanemaruje se utjecaj promjene oblika presjeka štapnih elemenata.
Modificirani postupak u ovom prikazu izveden je za ravninske okvirne konstrukcije koje u sebi sadrže samo horizontalne (grede) i vertikalne (stupovi) štapne elemente, bez kosih štapnih elemenata, pri čemu se uzimaju jednake visine stupova prve etaže.
Prihvaćena je konvencija predznaka kutova zaokreta krajeva štapnoga elementa i momenata savijanja na krajevima elementa tako da se orijentaciji koja ima suprotan smisao od smisla vrtnje kazaljke na satu pridružuje predznak "+". Predznak vrijednosti unutarnje sile N (uzdužne) pozitivan je ako je ona vlačna sila, a predznak unutarnje sile T (poprečne) pozitivan je kada se orijentacije T i N, u redoslijedu T pa N, poklapaju s orijentacijama baze desnoga kartezijevog koordinatnog sustava.
Promatra se translacijski pomična ravninska okvirna konstrukcija s 5 etaža i jednim poljem (slika 1.) opterećena potpuno proizvoljnim vanjskim opterećenjem. Proračun se provodi na zamjenjujućem sistemu u kojemu su spriječeni zaokreti čvorova, ali mu, za razliku od KCP-a, translacijski pomaci čvorova nisu spriječeni (slika 2.). Taj zamjenjujući pridržani sistem nazivat će se osnovnim sistemom. Na slici 2. grafičkom oznakom u obliku kvadratića smještenih u čvorovima osnovnoga sistema označene su upete veze pomoću kojih su spriječeni kutovi zaokreta štapnih elemenata u tim čvorovima, a zadržana je mogućnost translacijskoga pomicanja čvorova.



Slika 1. Primjer translacijski pomične višeetažne okvirne konstrukcije

Uvodi se definicija "etaže" okvirne konstrukcije: etaža je dio ravninske okvirne okvirne konstrukcije koji se sastoji od reda stupova i reda greda koje spajaju gornje krajeve stupova te etaže. Etaže se numeriraju brojevima 1, 2, 3,..., kao "etaža 1", "etaža 2", "etaža 3",..., tako da se redni broj 1 pridružuje najnižoj etaži.
Primjerice, etaži 3 konstrukcije (slika 2.) pripadaju stupovi 7-5 i 8-6 te greda 7-8. Isto tako, etaži 3 pripadaju čvorovi sistema 7 i 8.
Zbog pretpostavke o zanemarivanju uzdužne deformacije štapnih elemenata svi čvorovi iste etaže, očito je, imat će isti translacijski pomak.
Kut zaokreta stupova proizvoljne *i*-te etaže, ψ_i, definirat će se kao

$$\psi_i = \frac{u_{i-1} - u_i}{h_i} \tag{4}$$

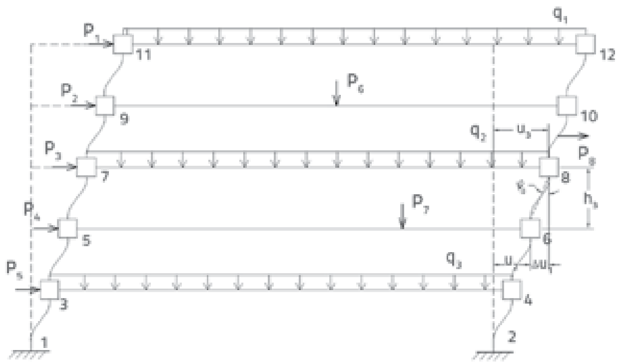
gdje su: u_i pomak proizvoljne etaže *i*, u_{i-1} pomak etaže *i*-1, a h_i visina etaže *i* (slika 2.), pri čemu je kut zaokreta ψ_i predznaka "+" ako mu je smisao suprotan od smisla vrtnje kazaljke na satu.
Na slici 2. istaknut je kut zaokreta stupova 7-5 i 8-6 etaže 3: $\psi_3 = \psi_{7-5} = \psi_{8-6}$.
Momenti ostvareni na krajevima proizvoljnoga stupa *i-j* proizvoljne etaže *k* izazvani vanjskim djelovanjem na konstrukciju dobivaju se pomoću poznatoga izraza

$$\tilde{M}_{i,j} = \bar{M}_{i,j} - 6 \cdot k_{i,j} \cdot \psi_k \tag{5}$$

dok se vrijednosti poprečnih sila na krajevima toga stupa dobivaju pomoću poznatoga izraza

$$\tilde{T}_{i,j} = \overline{T}_{i,j} - \frac{12 \cdot k_{i,j} \cdot \psi_k}{h_k} \tag{6}$$

gdje su: $\overline{M_{i,j}}$ moment upetosti KCP-a u presjeku *i,j*, $k_{i,j}$ krutost stupa *i–j*, h_k visina etaže *k*, ψ_k kut zaokreta stupova etaže *k* kojoj pripada stup *i–j* nastao zbog translacijskoga pomicanja krajeva stupova te etaže, $\overline{T}_{i,j}$ vrijednost poprečne sile punoga pridržanja KCP-a u presjeku *i,j* stupa *i-j* (za obostrano upeti štapni element).



Slika 2. Zamjenjujući pridržani sistem s prikazanom deformacijom

Na slici 3. prikazan je izolirani dio osnovnoga sistema dobiven presijecanjem konstrukcije preko gornjih krajeva stupova etaže 3 .

Odredimo li pomoću izraza (6) vrijednosti poprečnih sila u presjecima 7,5 i 8,6 stupova etaže 3, uvedemo li oznaku H_3 za vrijednost zbroja svih horizontalnih vanjskih sila koje se nalaze iznad čvorova etaže 3 (uključujući i sile u tim čvorovima) (u ovom slučaju je $H_3 = P_1 + P_2 + P_3 + P_8$), uvrstimo li te vrijednosti u jednadžbu ravnoteže horizontalnih djelovanja toga izoliranog elementa,

$$\sum F_{i(x)} = H_3 - \tilde{T}_{7,5} - \tilde{T}_{8,6} = 0 \tag{7}$$

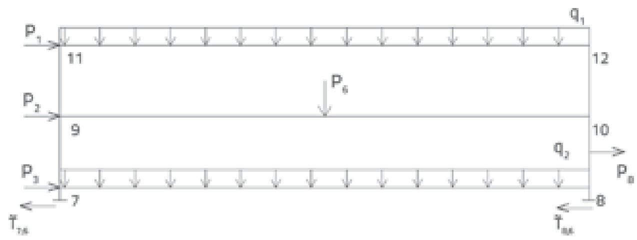
i sredimo li izraz, dobivamo da je vrijednost kuta zaokreta stupova etaže 3 izazvanoga vanjskim opterećenjem

$$\psi_3 = \frac{\overline{T}_3 - H_3}{12 \cdot K_3} \cdot h_3 \tag{8}$$

gdje je $\overline{T}_3 = \overline{T}_{7,5} + \overline{T}_{8,6}$ zbroj poprečnih sila upetosti KPC-a gornjih krajeva svih stupova etaže 3, dok je $K_3 = k_{7,5} + k_{8,6}$ zbroj krutosti svih stupova te etaže.

Primijenimo li sada izraz (5) na presjek 7,5 stupa 7–5 etaže 3, uvrstimo li (8) i sredimo, dobivamo izraz za vrijednost momenta upetosti MPC-a u presjeku 7,5 stupa 7–5 etaže 3 osnovnoga sistema izazvanoga vanjskim djelovanjem na konstrukciju:

$$\tilde{M}_{7,5} = \overline{M}_{7,5} + \frac{k_{7,5}}{2 \cdot K_3} \cdot (H_3 - \overline{T}_3) \cdot h_3 \tag{9}$$



Slika 3. Izolirana 4. i 5. etaža okvirne konstrukcije

Izraz (9) predstavlja izraz za moment upetosti MCP-a u presjeku 7,5 stupa 7-5 etaže 3 osnovnoga sistema izazvan vanjskim opterećenjem. Na potpuno isti način mogu se dobiti vrijednosti momenata upetosti MPC-a i u svim ostalim presjecima (5,7; 8,6 i 6,8) stupova etaže 3.

Iz prikazanih razmatranja, budući da je etaža 3 konstrukcije potpuno proizvoljno odabrana, proizilazi da se izraz (9) u svom punom značenju može primijeniti na bilo koje stupove bilo koje etaže bilo koje ravninske pomične okvirne konstrukcije, bez obzira na broj stupova etaže.

Za proizvoljnu ravninsku okvirnu konstrukciju s proizvoljnim brojem etaža i s proizvoljnim brojem stupova u etaži, izraz za vrijednost momenta upetosti MCP-a za presjek i,j po volji odabranoga stupa *i–j* proizvoljno odabrane *k*-te etaže sistema bio bi

$$\tilde{M}_{i,j} = \overline{M}_{i,j} + \frac{k_{i,j}}{2 \cdot K_k} \cdot (H_k - \overline{T}_k) \cdot h_k \tag{10}$$

gdje su: $\overline{M_{i,j}}$ moment upetosti KCP-a u presjeku *i,j* stupa *i–j* *k*-te etaže, $k_{i,j}$ krutost stupa *i-j* *k*-te etaže, K_k zbroj krutosti svih stupova *k*-te etaže, H_k zbroj svih horizontalnih vanjskih sila iznad *k*-te etaže, uključujući sile u ravnini greda *k*-te etaže, $\overline{T}_k$ zbroj poprečnih sila pune upetosti KCP-a gornjih krajeva svih stupova *k*-te etaže, h_k visina *k*-te etaže.

Vrijednost momenta upetosti MCP-a u proizvoljnom presjeku *u,v* proizvoljne grede *u-v* proizvoljne *k*-te etaže sistema, imajući u vidu da translacijski pomaci čvorova etaže ne izazivaju kut zaokreta greda etaže, dobiva se pomoću općega izraza

$$\tilde{M}_{u,v} = \overline{M}_{u,v} \tag{11}$$

gdje je $\overline{M}_{u,v}$ moment upetosti KCP-a u presjeku *u,v*.

3.2. Razdijelni koeficijenti modificiranoga Crossova postupka

Dobiveni momenti upetosti MCP-a $\tilde{M}_{7,5}$, $\tilde{M}_{7,8}$ i $\tilde{M}_{7,9}$ u presjecima oko čvora 7 osnovoga sistema nisu uravnoteženi jer ne predstavljaju konačno rješenje početnoga problema, budući da su ostvareni na sistemu u kojemu su spriječeni kutovi zaokreta čvorova.

Ukupni neuravnoteženi moment čvora 7 zbroj je svih tih pojedinačnih momenata:

$$M_7^{(0)} = \tilde{M}_{7,5} + \tilde{M}_{7,8} + \tilde{M}_{7,9} \quad (12)$$

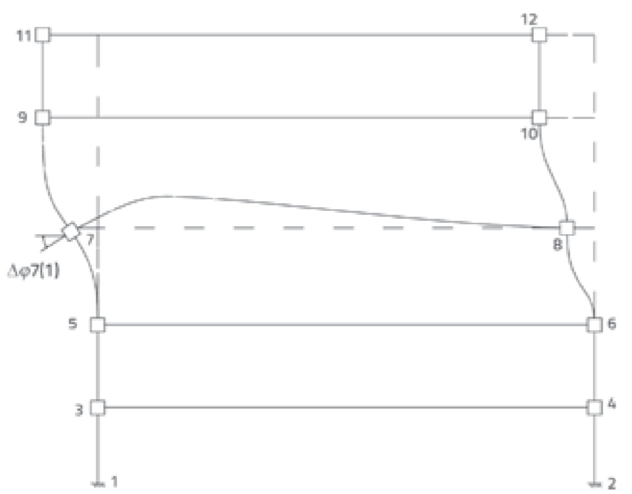
Indeks (0) u oznaci za ukupni neuravnoteženi moment čvora 7 označava činjenicu da ta vrijednost predstavlja početno – nulto stanje neuravnoteženosti momenata toga čvora u numeraciji pojedinačnih koraka MCP-a.
Poznati izrazi za vrijednosti momenata i poprečnih sila na krajevima obostrano upetoga štapnog elementa *i–j* duljine $L_{i,j}$, izazvanih prisilnim kutovima zaokreta na krajevima elementa φ_i i φ_j, jesu

$$m_{i,j} = 4 \cdot k_{i,j} \cdot \varphi_i + 2 \cdot k_{i,j} \cdot \varphi_j \quad (13)$$

$$t_{i,j} = \frac{6 \cdot k_{i,j}}{L_{i,j}} \cdot \varphi_i + \frac{6 \cdot k_{i,j}}{L_{i,j}} \cdot \varphi_j \quad (14)$$

Čvoru 7 osnovnoga sistema zadaje se prirast kuta zaokreta $\Delta\varphi_7^{(1)}$ u mjeri koja će izazvati prirast momenata savijanja u presjecima oko čvora 7 zbroj kojih će po iznosu biti jednak neuravnoteženom momentu $M_7^{(1)}$, ali suprotnoga predznaka (slika 4.). Pri tome se svi ostali čvorovi osnovnoga sistema drže nezaokrenutima. Indeks (1) u oznaci $\Delta\varphi_7^{(1)}$ predstavlja numeracijsku oznaku za prvi korak iteracijskoga postupka.
Za takvo opterećenje osnovnoga sistema očito je da je za svaku etažu *k* sistema vrijednost zbroja horizontalnih vanjskih sila

$$H_k(\Delta\varphi_7^{(1)}) = 0 \quad (15)$$



Slika 4. Zamjenjujući pridržani sistem opterećen prisilnim kutom zaokreta u čvoru 7

Vrijednosti prirasta momenata koji predstavljaju momente upetosti zbog opterećenja $\Delta\varphi_7^{(1)}$, pri čemu su spriječeni kutovi zaokreta svih ostalih čvorova sistema, dobivaju se primjenom izraza (13) za sve presjeke konstrukcije, dok se vrijednosti prirasta poprečnih sila koji predstavljaju poprečne sile upetosti zbog opterećenja $\Delta\varphi_7^{(1)}$ dobijaju primjenom izraza (14) za sve presjeke konstrukcije.

Primjenom izraza (13) i (14) za etažu 3 i etažu 4 dobivamo vrijednosti momenata upetosti i poprečnih sila upetosti zbog opterećenja $\Delta\varphi_7^{(1)}$:

$$\begin{aligned} &\bar{M}_{7,5}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = 4 \cdot k_{7,5} \cdot \Delta\varphi_7^{(1)}, \bar{M}_{5,7}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = 2 \cdot k_{7,5} \cdot \Delta\varphi_7^{(1)}, \\ &\bar{M}_{7,9}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = 4 \cdot k_{7,9} \cdot \Delta\varphi_7^{(1)}, \bar{M}_{9,7}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = 2 \cdot k_{7,9} \cdot \Delta\varphi_7^{(1)} \\ &\bar{M}_{7,8}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = 4 \cdot k_{7,8} \cdot \Delta\varphi_7^{(1)}, \bar{M}_{8,6}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \bar{M}_{6,8}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

i

$$\begin{aligned} &\bar{T}_{7,5}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = 6 \cdot \frac{k_{7,5}}{h_3} \cdot \Delta\varphi_7^{(1)}, \bar{T}_{7,9}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = 6 \cdot \frac{k_{7,9}}{h_4} \cdot \Delta\varphi_7^{(1)} \\ &\bar{T}_{8,6}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \bar{T}_{8,10}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

gdje je h_3 visina etaže 3, a h_4 visina etaže 4.

Zbrojevi su poprečnih sila upetosti svih stupova etaže 3 i poprečnih sila upetosti svih stupova etaže 4 osnovnoga sistema

$$\begin{aligned} &\bar{T}_3(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \bar{T}_{7,5}(\Delta\varphi_7^{(1)}) + \bar{T}_{8,6}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = 6 \cdot \frac{k_{7,5}}{h_3} \cdot \Delta\varphi_7^{(1)} \\ &\bar{T}_4(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \bar{T}_{7,9}(\Delta\varphi_7^{(1)}) + \bar{T}_{8,10}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = 6 \cdot \frac{k_{7,9}}{h_4} \cdot \Delta\varphi_7^{(1)} \end{aligned} \quad (18)$$

Uvrštavanjem na odgovarajući način izraze (15), (16) i (18) u opći izraz (10) i sređivanjem dolazi se do izraza za vrijednost prirasta momenta savijanja MCP-a za presjeke 7,5 i 7,9 stupova 7–5 i 7–9 izazvanoga kutom $\Delta\varphi_7^{(1)}$ čvora 7 na koji su ovi stupovi priključeni:

$$\begin{aligned} &\Delta M_{7,5}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = [4 \cdot k_{7,5} - 3 \cdot \frac{(k_{7,5})^2}{K_3}] \cdot \Delta\varphi_7^{(1)} \\ &\Delta M_{7,9}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = [4 \cdot k_{7,9} - 3 \cdot \frac{(k_{7,9})^2}{K_4}] \cdot \Delta\varphi_7^{(1)} \end{aligned} \quad (19)$$

pritom je K_3 zbroj krutosti svih stupova etaže 3, a K_4 zbroj krutosti svih stupova etaže 4.
Kombinacijom izraza (11) i (13) dobiva se izraz za vrijednost prirasta momenta savijanja MCP-a za presjek 7,8 grede 7-8 izazvanoga kutom $\Delta\varphi_7^{(1)}$ na koji je greda priključena:

$$\Delta M_{7,8}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = 4 \cdot k_{7,8} \cdot \Delta\varphi_7^{(1)} \quad (20)$$

Uvede li se za proizvoljno odabrani stup *i–j* proizvoljne *k*-te etaže koeficijent MCP-a $\tilde{a}_{i,j}$ kao

$$\tilde{a}_{i,j} = 4 \cdot k_{i,j} - 3 \cdot \frac{(k_{i,j})^2}{K_k} \quad (21)$$

gdje je k_{ij} krutost promatranog stupa, a K_i zbroj krutosti svih stupova k-te etaže kojoj pripada stup i-j, onda se izraz (19) može napisati kao

$$\Delta M_{7,5}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \tilde{a}_{7,5} \cdot \Delta\varphi_7^{(1)}$$
$$\Delta M_{7,9}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \tilde{a}_{7,9} \cdot \Delta\varphi_7^{(1)} \tag{22}$$

Uvede li se zatim za proizvoljno odabranu gredu u–v proizvoljne k-te etaže koeficijent MCP-a $\tilde{a}_{u,v}$ kao

$$\tilde{a}_{u,v} = a_{u,v} = 4 \cdot k_{i,j} \tag{23}$$

onda se izraz (20) može pisati kao

$$\Delta M_{7,8}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \tilde{a}_{7,8} \cdot \Delta\varphi_7^{(1)} \tag{24}$$

Ako se u duhu KCP-a sada uvede definicija "razdjelnoga koeficijenta" MCP-a za po volji odabrani presjek i,j proizvoljno odabranoga čvora i pomične okvirne konstrukcije,

$$\tilde{\mu}_{i,j} = -\frac{\tilde{a}_{i,j}}{\tilde{A}_i} \tag{25}$$

gdje je $\tilde{a}_{i,j}$ koeficijent MCP-a za proizvoljni presjek i,j čvora i, čija se vrijednost za slučaj da je presjek i,j presjek stupa dobiva pomoću izraza (21), a za slučaj da je i,j presjek grede pomoću izraza (23), a $\tilde{A}_i$ zbroj vrijednosti koeficijenata $\tilde{a}_{i,j}$ MCP-a svih štapnih elemenata koji se sastaju u promatranom čvoru i, tada se, potpuno u skladu s KCP-om, u bilo kojem s-tom koraku iteracije MCP-a za bilo koji presjek i,j nekoga čvora i uravnotežavajući prirast momenta $\Delta M_{i,j}^{(s)}(\Delta\varphi_i^{(s)})$ zbog zadanoga prirasta kuta zaokreta $\Delta\varphi_i^{(s)}$ može iskazati kao

$$\Delta M_{i,j}^{(s)}(\Delta\varphi_i^{(s)}) = \tilde{\mu}_{i,j} \cdot M_i^{(s)} \tag{26}$$

gdje je $\tilde{\mu}_{i,j}$ odgovarajući razdjelni koeficijent MCP-a, a $M_i^{(s)}$ tekući ukupni neuravnoteženi moment u čvoru i s-toga koraka iteracije. Momenti u izrazu (26) se u skladu s definicijama iz KCP-a i u MCP-u nazivaju *raspodijeljenim momentima* MCP-a.

Konkretno za presjeke oko čvora 7 primjenom izraza (21), (23), (25) i (26) za prirast kuta zaokreta $\Delta\varphi_7^{(1)}$ prvoga koraka iteracije uravnotežavajući prirasti su momenata savijanja (raspodijeljeni momenti)

$$\Delta M_{7,5}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \tilde{\mu}_{7,5} \cdot M_7^{(1)},\ \Delta M_{7,9}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \tilde{\mu}_{7,9} \cdot M_7^{(1)}$$
$$\Delta M_{7,8}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \tilde{\mu}_{7,8} \cdot M_7^{(1)} \tag{27}$$

gdje se razdjelni koeficijenti $\tilde{\mu}_{7,5}$ i $\tilde{\mu}_{7,9}$ nalaze primjenom izraza (21) i (25), a koeficijent $\tilde{\mu}_{7,8}$ primjenom izraza (23) i (25).

3.3. Prijenosni koeficijenti modificiranoga Crossova postupka

Osim u presjecima oko čvora 7, prirasti momenata savijanja zbog zadanoga prirasta kuta zaokreta $\Delta\varphi_7^{(1)}$ pojavljuju se i u drugim presjecima osnovnog sistema.

Ako u izraz (10) uvrstimo izraz (15), izraz (16) u dijelu koji se odnosi na presjeke stupa 8-6 i izraz (18) u dijelu koji se odnosi na etažu 3, dobivamo izraz za priraste momente savijanja u presjecima 6,8 i 8,6 stupa 6-8 izazvanih prirastom kuta zaokreta $\Delta\varphi_7^{(1)}$:

$$\Delta M_{6,8}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \Delta M_{8,6}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = -3 \cdot \frac{k_{7,5} \cdot k_{6,8}}{K_3} \cdot \Delta\varphi_7^{(1)} \tag{28}$$

gdje su $k_{7,5}$ i $k_{6,8}$ krutosti stupova 7-5 i 6-8 etaže 3 kojoj pripada čvor 7 sa zadanim prirastom kuta zaokreta $\Delta\varphi_7^{(1)}$.

Dijeleći odgovarajuće strane izraza (28) s odgovarajućim stranama izraza za $\Delta M_{7,5}(\Delta\varphi_7^{(1)})$ iz (19) i naknadnim sređivanjem dobivamo:

$$\frac{\Delta M_{6,8}(\Delta\varphi_7^{(1)})}{\Delta M_{7,5}(\Delta\varphi_7^{(1)})} = \frac{\Delta M_{8,6}(\Delta\varphi_7^{(1)})}{\Delta M_{7,5}(\Delta\varphi_7^{(1)})} = \frac{3 \cdot k_{6,8}}{3 \cdot k_{7,5} - 4 \cdot K_3} \tag{29}$$

Ako se sada, u skladu s definicijom iz KCP-a, uvede definicija "prijenosnog koeficijenta" $\tilde{p}_{ij-m,n}$ MCP-a s presjeka i,j proizvoljnoga stupa i-j proizvoljne k-te etaže na presjeke m,n i n,m stupa m-n te iste k-te etaže :

$$\tilde{p}_{i,j-m,n} = \tilde{p}_{i,j-n,m} = \tilde{p}_{j,i-m,n} = \tilde{p}_{j,i-n,m} = \frac{3 \cdot k_{m,n}}{3 \cdot k_{i,j} - 4 \cdot K_k} \tag{30}$$

gdje su k_{ij} i $k_{m,n}$ krutosti stupova i-j i m-n k-te etaže sistema, a K_k zbroj krutosti svih stupova k-te etaže, onda se primjenom (46) na stupove 7-5 i 6-8 etaže 3, uvrštavanjem u (29) i sređivanjem izraz (29) može pisati kao

$$\Delta M_{6,8}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \Delta M_{8,6}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \tilde{p}_{7,5-6,8} \cdot \Delta M_{7,5}(\Delta\varphi_7^{(1)}) \tag{31}$$

gdje je $\tilde{p}_{7,5\text{-}6,8}$ prijenosni koeficijent MCP-a s presjeka 7,5 stupa 7-5 na presjek 6,8, odnosno na presjek 8,6 stupa 6-8 etaže 3.

Budući da su etaža 3 i čvor 7 promatranoga pomičnog okvira odabrani kao primjer potpuno proizvoljno, i ovdje proizilazi da bi se za bilo koju pomičnu okvirnu konstrukciju s proizvoljnim brojem etaža i proizvoljnim brojem polja mogao postaviti izraz koji povezuje priraste momenata savijanja u presjecima dva stupa iste etaže.

Ako bi se nekom proizvoljno odabranom čvoru i neke proizvoljne k-te etaže pomične okvirne konstrukcije zadao prirast kuta zaokreta $\Delta\varphi_i$, koji bi u presjeku i,j stupa i-j k-te etaže koji je svojim krajem i priključen na čvor i izazvao prirast momenta savijanja $\Delta M_{i,j}(\Delta\varphi_i)$, onda bi odgovarajući prirasti momenata na krajevima *m,n* i *n,m* nekog proizvoljnog stupa *m-n* *k*-te etaže, u skladu s izrazom (31), bili

$$\Delta M_{m,n}(\Delta\varphi_i) = \Delta M_{n,m}(\Delta\varphi_i) = \tilde{p}_{i,j-m,n} \cdot \Delta M_{i,j}(\Delta\varphi_i) \tag{32}$$

gdje je $\tilde{p}_{i,j-m,n}$ prijenosni koeficijent MCP-a (PKMCP) s presjeka *i,j* stupa *i-j* na presjeke *m,n* i *n,m* stupa *m-n*, gdje stupovi *i-j* i *m-n* pripadaju istoj *k*-toj etaži sistema.

Odgovarajućom primjenom izraza (48) na presjeke stupa 8-10 etaže 4 dobivaju se prirasti momenta savijanja u presjecima 8,10 i 10,8 etaže 4 promatrane okvirne konstrukcije

$$\Delta M_{8,10}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \Delta M_{10,8}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \tilde{p}_{7,9-8,10} \cdot \Delta M_{7,9}(\Delta\varphi_7^{(1)}) \tag{33}$$

gdje je $\tilde{p}_{7,9-8,0}$ PKMCP s presjeka 7,9 stupa 7-9 na presjeke 8,10 i 10,8 stupa 8-10, pri čemu stupovi 7-9 i 8-10 pripadaju etaži 4 okvirne konstrukcije.

Zbog zadanoga prirasta kuta zaokreta $\Delta\varphi_7^{(1)}$ ostvaruju se također i prirasti momenata na suprotnim krajevima stupova 7-5 i 7-9 koji su priključeni na čvor 7.

Ako u izraz (10) uvrstimo izraz (15), izraz (16) u dijelu koji se odnosi na presjek 5,7 stupa 7–5 i izraz (18) u dijelu koji se odnosi na etažu 3, dobivamo izraz za priraste momente savijanja u presjeku 5,7 stupa 7-5 izazvanih prirastom kuta zaokreta $\Delta\varphi_7^{(1)}$:

$$\Delta M_{5,7}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = [2 \cdot k_{7,5} - 3 \cdot \frac{(k_{7,5})^2}{K_3}] \cdot \Delta\varphi_7^{(1)} \tag{34}$$

Dijeleći odgovarajuće strane izraza (34) s odgovarajućim stranama izraza za $\Delta M_{7,5}(\Delta\varphi_7^{(1)})$ iz (19) i nakon sređivanja dobivamo

$$\frac{\Delta M_{5,7}(\Delta\varphi_7^{(1)})}{\Delta M_{7,5}(\Delta\varphi_7^{(1)})} = \frac{3 \cdot k_{7,5} - 2 \cdot K_3}{3 \cdot k_{7,5} - 4 \cdot K_3} \tag{35}$$

Ako se, u skladu s prije pokazanim, uvede definicija "prijenosnoga koeficijenta" $\tilde{p}_{i,j-j,i}$ s presjeka *i,j* proizvoljnog stupa *i-j* proizvoljne *k*-te etaže na suprotni kraj *j,i* tog istog stupa :

$$\tilde{p}_{i,j-j,i} = \tilde{p}_{j,i-i,j} = \frac{3 \cdot k_{i,j} - 2 \cdot K_k}{3 \cdot k_{i,j} - 4 \cdot K_k} \tag{36}$$

gdje je $k_{i,j}$ krutost stupa *i-j* *k*-te etaže sistema, a K_k zbroj krutosti svih stupova te etaže, onda se primjenom (36) na stup 7-5 etaže 3, uvrštavanjem dobivenoga rezultata u (35) i sređivanjem izraz (35) može pisati kao

$$\Delta M_{5,7}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \tilde{p}_{7,5-5,7} \cdot \Delta M_{7,5}(\Delta\varphi_7^{(1)}) \tag{37}$$

gdje je $\tilde{p}_{7,5-5,7}$ PKMCP s presjeka 7,5 stupa 7-5 na suprotni presjek 5,7 toga istog stupa.

Ako bi se nekom proizvoljno odabranom čvoru *i* neke proizvoljne *k*-te etaže pomične okvirne konstrukcije zadao prirast kuta zaokreta $\Delta\varphi_i$, koji bi u presjeku *i,j* stupa *i-j* *k*-te etaže koji je svojim krajem *i* priključen na čvor *i* izazvao prirast momenta savijanja $\Delta M_{i,j}(\Delta\varphi_i)$, tada bi odgovarajući prirast momenta (preneseni moment) na suprotnom kraju *j,i* toga istog stupa, u skladu s izrazom (37), bio

$$\Delta M_{j,i}(\Delta\varphi_i) = \tilde{p}_{i,j-j,i} \cdot \Delta M_{i,j}(\Delta\varphi_i) \tag{38}$$

gdje je $\tilde{p}_{i,j-j,i}$ PKMCP s presjeka *i,j* proizvoljnog stupa *i-j* na suprotni presjek *j,i* toga istog stupa.

Odgovarajućom primjenom izraza (38) na presjek 9,7 stupa 7-9 etaže 4 dobiva se prirast momenta savijanja u presjeku 9,7 etaže 4 promatrane okvirne konstrukcije,

$$\Delta M_{9,7}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \tilde{p}_{7,9-9,7} \cdot \Delta M_{7,9}(\Delta\varphi_7^{(1)}) \tag{39}$$

gdje je $\tilde{p}_{7,9-9,7}$ PKMCP s presjeka 7,9 stupa 7-9 na suprotni presjek 9,7 tog istog stupa.

Konačno, zbog zadanoga prirasta kuta zaokreta $\Delta\varphi_7^{(1)}$ ostvaruje se i prirast momenta na suprotnom kraju 8,7 grede 7-8 priključene na čvor 7. Budući da zbog zadanoga prirasta kuta zaokreta $\Delta\varphi_7^{(1)}$ ne dolazi do zaokreta grede 7-8, već samo do njezinoga translacijskog pomicanja po horizontalnom pravcu, proizilazi da se veza između prirasta momenata savijanja na krajevima grede 7-8 može prikazati pomoću izraza

$$\Delta M_{8,7}(\Delta\varphi_7^{(1)}) = \tilde{p}_{7,8-8,7} \cdot \Delta M_{7,8}(\Delta\kappa_7^{(1)}) \tag{40}$$

gdje je $\tilde{p}_{7,8-8,7}$ PKMCP s jednoga na drugi kraj grede 7-8 u MCP-u, koji je konstantnoga iznosa 0,5, kao i u KCP-u.

Općenito, za bilo koju gredu *m-n* bilo kojega pomičnog okvirnog sistema vrijednost pripadajućega PKMCP-a istog je iznosa kao i iznos prijenosnog koeficijenta *p* KCP-a:

$$\tilde{p}_{m,n-n,m} = \tilde{p}_{n,m-m,n} = p = 0{,}5 \tag{41}$$

a vrijednost prenesenoga momenta MCP-a na suprotni kraj grede je istovjetna kao kod KCP-a, to jest dobiva se kao

$$\Delta M_{n,m}(\Delta\varphi_m) = \tilde{p}_{m,n-n,m} \cdot \Delta M_{m,n}(\Delta\varphi_m) = 0{,}5 \cdot \Delta M_{m,n}(\Delta\varphi_m) \tag{42}$$

gdje je $\Delta\varphi_m$ prirast kuta zaokreta čvora *m* na koji je priključena greda *m-n*.

Prirast kuta zaokreta $\Delta\varphi_7^{(1)}$, očito je, ne proizvodi priraste momenata savijanja u presjecima štapnih elemenata etaže 1, etaže 2 i etaže 5 promatrane okvirne konstrukcije sa slike 3., što proizilazi iz primjene izraza (10) na sve stupove etaža 1, 2 i 5 i primjene izraza (11) na sve grede etaža 1, 2 i 5, a imajući u vidu izraz (15) i činjenicu da je za svaki proizvoljno odabrani štapni element *i-j* etaža 1, 2 i 5 za opterećenje $\Delta\varphi_7^{(1)}$ očito

$$\bar{M}_{i,j} = \bar{M}_{j,i} = \bar{T}_{i,j} = \bar{T}_{j,i} = 0 \quad (43)$$

Prirasti momenata u izrazima (32), (38) i (42) se, u skladu s definicijama iz KCP-a, i u ovom modificiranom postupku nazivaju *preneseni momenti* postupka.

3.4. Tijek iteracije modificiranoga Crossova postupka

Nakon što su, kako je prije pokazano, u skladu s definicijama iz KCP-a definirani momenti upetosti MCP-a (izrazi (10) i (11)), koeficijenti $\tilde{\alpha}_{i,j}$ MCP-a (izrazi (21) za stupove i (23) za grede), razdjelni koeficijenti MCP-a (izraz (25)), prijenosni koeficijenti MCP-a (izrazi (30) i (36) za stupove i izraz (41) za grede), proračunski postupak prema MCP-u za proizvoljnu translacijski pomičnu konstrukciju s proizvoljnim brojem etaža i proizvoljnim brojem polja etaže provodi se na potpuno istovjetan način kao KCP, uzastopce, čvor po čvor, pri čemu se u svakom koraku postupka redom uravnoteže momenti svih čvorova sistema. Zaostali neuravnoteženi momenti svakoga koraka iteracije preneseni su momenti sa susjednih čvorova sistema koji se uravnotežuju u sljedećem koraku iteracije.
Glavna je razlika, kako je pokazano, između MCP-a i KCP-a u različitim izrazima za momente upetosti, za koeficijente $\tilde{\alpha}_{i,j}$, za prijenosne koeficijente, gdje je u MCP-u ugrađen utjecaj translacijskih pomaka konstrukcije.
Uz to, razlika je u širini zone prenesenih momenata. Kod KCP-a preneseni se momenti ostvaruju samo na suprotnim krajevima štapnih elemenata koji su priključeni u čvor kojem se zadaje prirast kuta zaokreta, dok kod MCP-a, u kojoj je u proračunski algoritam ugrađen i utjecaj translacijskih pomaka čvorova konstrukcije, zona prenesenih momenata obuhvaća suprotne krajeve priključenih greda i presjeke svih stupova k-te etaže kojoj pripada čvor kojem se zadaje prirast kuta i presjeke svih stupova (k+1)-ve etaže, ako k-ta etaža nije posljednja.
Aproksimacija MCP-a za vrijednost momenta savijanja na kraju *i* proizvoljnoga stupa *i-j* proizvoljne *k*-te etaže u *s*-tom se koraku dobiva u skladu s izrazom (1) kao

$$M_{i,j}^{(s)} = \tilde{M}_{i,j} + \sum_{r=1}^{s}(\tilde{\mu}_{i,j} \cdot M_i^{(r)}) + \sum_{m,n}^{(k)} \sum_{r=1}^{s-1}(p_{m,n-i,j} \cdot \mu_{m,n} \cdot M_m^{(r)}) \quad (44)$$

gdje su: $M_i^{(r)}$ ukupni neuravnoteženi moment u čvoru *i* *r*-toga koraka iteracije, $M_m^{(r)}$ ukupni neuravnoteženi moment *r*-toga koraka iteracije u proizvoljnom čvoru *m* proizvoljnog stupa *m-n* *k*-te etaže, a $\sum_{m,n}^{(k)} \sum_{r=1}^{s-1}(p_{m,n-i,j} \cdot \mu_{m,n} \cdot M_m^{(r)})$ zbroj prenesenih momenata svih koraka iteracije, zaključno s (*s*-1)-im korakom, na presjek *i,j* s presjeka svih stupova *k*-te etaže sistema.

Aproksimacija za vrijednost momenta savijanja na kraju proizvoljne grede u–v u *s*-tom se koraku dobiva prema izrazu

$$M_{u,v}^{(s)} = \tilde{M}_{u,v} + \sum_{k=1}^{s}(\tilde{\mu}_{u,v} \cdot M_u^{(k)}) + 0.5 \cdot \sum_{k=1}^{s-1}(\tilde{\mu}_{v,u} \cdot M_v^{(k)}) \quad (45)$$

gdje je značenje pojedinih članova izraza (45) na odgovarajući način sukladno značenju odgovarajućih članova izraza (1) kod KCP-a.
Kao i kod KCP-a i u MCP-u se iteracija završava kada je zadovoljen zadani kriterij točnosti rješenja u skladu s izrazom (3).

3.5. Područje primjene MCP-a

Prikazana metoda prikladna je za statički proračun višepoljnih i višeetažnih ravninskih okvirnih konstrukcija bez kosih štapnih elemenata, kod kojih ne postoje vertikalne projekcije translacijskih pomaka čvorova konstrukcije. Postojanje kosih štapnih elemenata, bilo greda, bilo stupova, prouzročilo bi i zaokretanje grednih elemenata, što bi značajno posložnilo izraze za razdjelne i prijenosne koeficijente postupka, što nije tema ovoga prikaza.
U ovom su prikazu izvedeni koeficijenti samo za slučaj jednake visine stupova prve etaže i samo za slučaj obostrano krutih čvorova štapnih elemenata.
No, postupak se očito vrlo lako može proširiti na okvirne konstrukcije s različitim visinama stupova prve etaže, sa zglobnim krajevima bilo kojega štapnog elementa i za bilo koju kombinaciju ležajeva konstrukcije. Treba samo u tijek izvođenja izraza za koeficijente u odjeljcima 2.3 i 2.4. za štapne elemente tipa upeto-zglob primjenom statičke kondenzacije primijeniti izraze za krutosti takvoga tipa elemenata, a za slučaj različitih visina stupova iskoristiti činjenicu da se kutevi zaokreta stupova prve etaže, budući da je jedinstven translacijski pomak grednoga pojasa te etaže, mogu prikazati pomoću jednoga parametra, na primjer zaokreta prvoga stupa prve etaže, množenjem toga zaokreta s količnikom visine prvoga stupa i visine promatranoga stupa.
Autor je izveo sve ove izraze, ali ih nije prikazao u članku zbog ograničenoga prostora, te ih priprema za neko buduće publiciranje.
Prikazani postupak prikladan je za formiranje manjega računalnog programa u kojem će se svi koraci proračuna, koji su repetativnoga karaktera, provesti automatski, pri čemu se zbog povećanja broja prenesenih momenata ovoga postupka u odnosu na KCP (prenose se momenti i na presjeke svih stupova etaže kojoj pripada čvor i na presjeke svih stupova etaže iznad) u računalnom programu koji je zamišljeno sredstvo provedbe MCP-a ne gubi na preglednosti i učinkovitosti postupka u odnosu na povećanje broja polja ili broja etaža sistema.

4. Numerički primjer

4.1. Proračun po MCP-u

Na slici 5. prikazan je primjer dvoetažne pomične ravninske konstrukcije za koju će se odrediti momentni dijagram primjenom MCP-a. Presjeci su svih štapnih elemenata pravokutni, a vrijednosti širine i visine presjeka pojedinoga štapnog elementa (*b/h*) prikazane su na slici 5., na koju su unesene i vrijednosti

vanjskoga opterećenja na konstrukciju. Modul elastičnosti materijala svih štapnih elemenata neka je jednak $E = 3 \cdot 10^7$ kN/m^2.
Vrijednosti krutosti štapnih elemenata jesu:

$k_{7,8} = k_{4,5} = 15625$ [kNm], $k_{5,6} = 18750$ [kNm], $k_{4,7} = k_{5,8} = 6750$ [kNm]

$k_{4,1} = k_{6,3} = 5062{,}5$ [kNm], $k_{5,2} = 16000$ [kNm]

Vrijednosti su zbrojeva krutosti svih stupova pojedine etaže konstrukcije:

$K_1 = k_{4,1} + k_{5,2} + k_{6,3} = 26125$ [kNm], $K_2 = k_{4,7} + k_{5,8} = 13500$ [kNm]

Momenti upetosti KCP-a u presjecima svih štapnih elemenata, primjenom poznatih izraza statike ravninskih konstrukcija, jesu:

$\bar{M}_{7,8} = \bar{M}_{4,5} = 18{,}00$ [kNm], $\bar{M}_{8,7} = \bar{M}_{5,4} = -18{,}00$ [kNm]

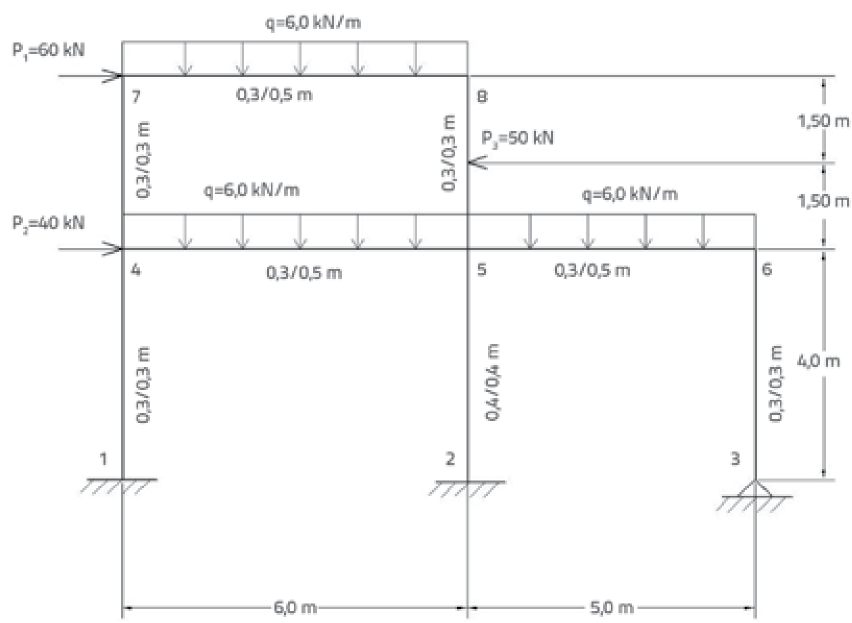
$\bar{M}_{5,6} = 12{,}50$ [kNm], $\bar{M}_{6,5} = -12{,}50$ [kNm]

$\bar{M}_{5,8} = -18{,}75$ [kNm], $\bar{M}_{8,5} = 18{,}75$ [kNm]

dok je vrijednost momenata upetosti KCP-a za ostale štapne elemente, koji su neopterećeni, jednaka 0.
Primjenom poznatih izraza statike ravninskih štapnih konstrukcija dobivaju se vrijednosti poprečnih sila upetosti KCP-a za stupove konstrukcije:

$\bar{T}_{5,8} = -25{,}00$ [kN], $\bar{T}_{8,5} = 25{,}00$ [kN]

dok je vrijednost poprečne sile upetosti KCP-a za ostale stupove, koji su neopterećeni, jednaka 0.



Slika 5. Dvoetažna okvirna konstrukcija za numerički primjer

Vrijednosti su zbrojeva horizontalnih sila pojedinih etaža sistema, u značenju iz prethodno navedene definicije MCP-a:

$H_1 = P_1 + P_2 - P_3 = 50{,}00$ [kN], $H_2 = P_1 = 60$ [kN]

Vrijednosti su zbrojeva poprečnih sila upetosti KCP-a za pojedine etažu konstrukcije, u značenju iz prethodno navedene definicije MCP-a:

$\bar{T}_1 = \bar{T}_{4,1} + \bar{T}_{5,2} + \bar{T}_{6,3} = 0$ [kN], $\bar{T}_2 = \bar{T}_{7,4} + \bar{T}_{8,5} = 25{,}00$ [kN]

Primjenom izraza (11) dobivaju se vrijednosti momenta upetosti MCP-a za presjeke greda konstrukcije koje su jednake dobivenim vrijednostima momenata upetosti KCP-a za grede.
Primjenom izraza (10) dobivaju se vrijednosti momenta upetosti MCP-a za presjeke stupova konstrukcije:

$\tilde{M}_{1,4} = \tilde{M}_{4,1} = \tilde{M}_{3,6} = \tilde{M}_{6,3} = 19{,}378$ [kNm],

$\tilde{M}_{2,5} = \tilde{M}_{5,2} = 61{,}244$ [kNm]

$\tilde{M}_{4,7} = \tilde{M}_{7,4} = 26{,}250$ [kNm], $\tilde{M}_{8,5} = 45{,}000$ [kNm], $\tilde{M}_{5,8} = 7.500$ [kNm]

Upotrijebivši na odgovarajući način izraze (21), (23) i (25) dobivamo vrijednosti razdjelnih koeficijenata MCP-a po čvorovima konstrukcije:

za čvor 4: $\tilde{\mu}_{4,7} = -0{,}1745$, $\tilde{\mu}_{4,1} = -0{,}1790$, $\tilde{\mu}_{4,5} = -0{,}6465$

za čvor 5: $\tilde{\mu}_{5,2} = -0{,}1831$, $\tilde{\mu}_{5,8} = -0{,}0893$, $\tilde{\mu}_{5,4} = -0{,}3307$, $\tilde{\mu}_{5,6} = -0{,}3969$

za čvor 6: $\tilde{\mu}_{6,3} = -0{,}1875$, $\tilde{\mu}_{6,5} = -0{,}8125$

za čvor 7: $\tilde{\mu}_{7,8} = -0{,}7874$, $\tilde{\mu}_{7,4} = -0{,}2126$

za čvor 8: $\tilde{\mu}_{8,7} = -0{,}7874$, $\tilde{\mu}_{8,5} = -0{,}2126$

Za stup 6-3 konstrukcije nije upotrijebljena statička kondenzacija budući da je čvor 3 zglobno spojen s podlogom. U osnovnom sistemu uneseno je pridržanje za kut zaokreta u čvoru 3, te se u iteracijskom postupku čvoru 3 zadaju prirasti kuta zaokreta u mjeri koja će osigurati iščezavanje momenta savijanja u presjeku 3,6. S tim u vezi, kako čvor 3 ima samo jedan presjek 3,6, razdjelni je koeficijent za taj čvor u ovom proračunskom postupku očito $\tilde{\mu}_{3,6} = -1{,}0$.
Primjenom izraza (32) i (36) za presjeke stupova konstrukcije dobivaju se vrijednosti prijenosnih koeficijenata MCP-a :

$\tilde{p}_{4,1\text{-}1,4} = \tilde{p}_{6,3\text{-}3,6} = 0{,}4150$, $\tilde{p}_{4,1\text{-}5,2} = \tilde{p}_{6,3\text{-}5,2} = -0{,}5374$

$$\tilde{p}_{4,1\text{-}6,3} = \tilde{p}_{6,3\text{-}4,1} = -0{,}1700$$

$$\tilde{p}_{5,2\text{-}2,5} = 0{,}0752,\ \tilde{p}_{5,2\text{-}1,4} = \tilde{p}_{5,2\text{-}6,3} = -0{,}2688$$

$$\tilde{p}_{4,7\text{-}7,4} = \tilde{p}_{8,5\text{-}5,8} = 0{,}2000$$

$$\tilde{p}_{4,7\text{-}5,8} = -0{,}6000$$

$$\tilde{p}_{8,5\text{-}7,4} = -0{,}6000$$

Upotrijebljeno se pokazano svojstvo prijenosnih koeficijenata:

$\tilde{p}_{i,j\text{-}j,i} = \tilde{p}_{j,i\text{-}i,j}$ iz (36) te $\tilde{p}_{i,j\text{-}m,n} = \tilde{p}_{i,j\text{-}n,m}$ i $\tilde{p}_{i,j\text{-}m,n} = \tilde{p}_{j,i\text{-}m,n}$ iz (30).

U skladu s izrazom (57) vrijednost prijenosnoga koeficijenta MCP-a za prijenos s jednoga kraja grede na njezin suprotni kraj za presjeke je svih greda jednaka prijenosnomu koeficijentu KCP-a i iznosi 0,5000.

Na slici 6. prikazana je shema provedenoga iteracijskog postupka po MCP-u. Proračunska shema napravljena je u skladu s uobičajenim shemama inženjerske prakse u primjeni KCP-a u RH, odnosno u skladu s proračunskim shemama iz [8]. Iteracija je provedena po varijanti Gauss-Seidel, gdje se preneseni momenti odmah uvode u proračun unutar tekućega iteracijskog koraka.

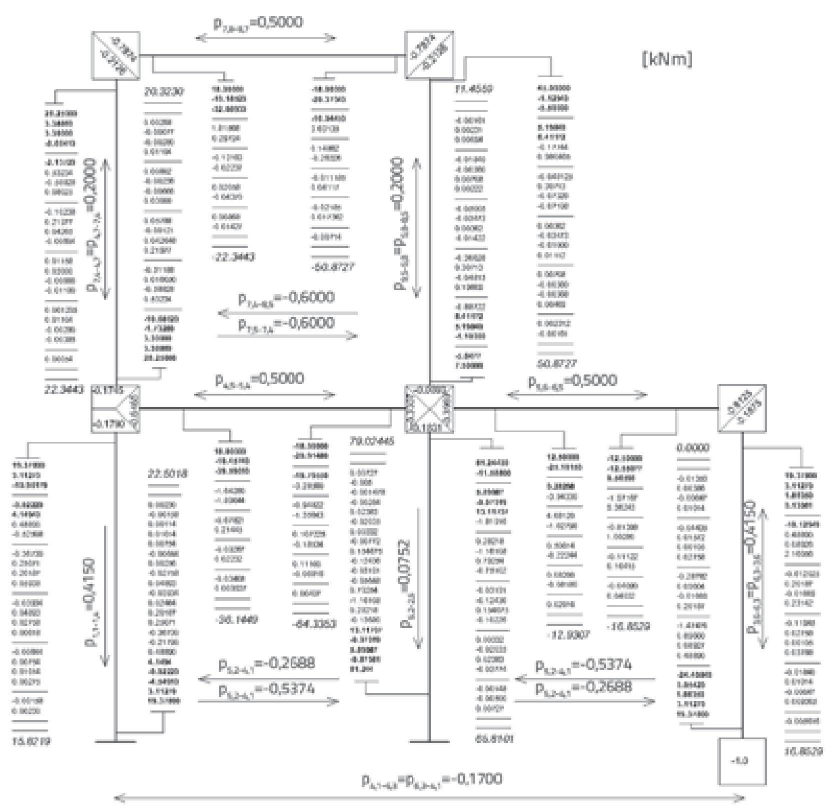
U svakom čvoru konstrukcije ucrtani su kvadratići u koje su unesene vrijednosti razdjelnih koeficijenata MCP-a, a ispod presjeka svakoga štapnog elementa upisane su vrijednosti momenata upetosti MCP-a. Na odgovarajući način u shemi sa slike 6. unešene su i vrijednosti prijenosnih koeficijenata MCP-a. Iteracijski postupak proveden je zaokruživanjem rezultata na 4 značajne decimalne znamenke.

Iteracijski postupak po MCP započinje uravnotežavanjem momenata u čvoru 5; početni neuravnoteženi moment čvora 5 je zbroj momenata upetosti MCP-a u presjecima oko čvora 5, u iznosu od +63,2441 kNm. Množenjem toga neuravnoteženog momenta razdjelnim koeficijentom MPC-a za čvor 5 dobivaju se uravnotežavajući prirasti momenata za presjek (pr.) 5,2: -11,5800 kNm, za pr. 5,4: -20,9148 kNm, za pr. 5,8: -5,6477 kNm, za pr. 5,6: -25,1015 kNm. Množenjem tih raspodijeljenih prirasta momenata čvora 5 odgovarajućim prijenosnim koeficijentima MPC-a dobivaju se vrijednosti prenesenih momenata: na pr. 2,5: -0,8708 kNm, na pr. 4,1 i 1,4: +3,1127 kNm, na pr. 6,3 i 3,6: +3,1127 kNm, na pr. 4,5: -10,4574 kNm, na pr. 6,5: -12,5508 kNm, na pr. 8,5: -1,1294 kNm, na pr. 4,7 i 7,4: +3,3866 kNm.

Izračunava se neuravnoteženi moment čvora 8 kao zbroj momenata upetosti presjeka toga čvora i prethodno prenesenih momenata s čvora 5, u iznosu od +25,8704 kNm. Množenjem toga neuravnoteženog momenta razdjelnim koef. MCP-a za čvor 8 dobivaju se uravnotežavajući prirasti momenata: za pr. 8,5: -5,5000 kNm, za pr. 8,7: -20,3704 kNm. Množenjem tih raspodijeljenih prirasta momenata čvora 8 odgovarajućim prijenosnim koef. MCP-a dobivaju se vrijednosti prenesenih momenata: na pr. 7,8: -10,1852 kNm, na pr. 5,8: -1,1000 kNm, na pr. 4,7 i 7,4: -3,3000 kNm.

Izračunava se neuravnoteženi moment čvora 7 kao zbroj momenata upetosti presjeka toga čvora i prethodno prenesenih momenata s čvorova 5 i 8, u iznosu od +40,7534 kNm. Množenjem toga neuravnoteženog momenta razdjelnim koef. MCP-a za čvor 7 dobivaju se uravnotežavajući prirasti momenata: za pr. 7,8: -32,0893 kNm, za pr. 7,4: -8,6641 kNm. Množenjem tih raspodijeljenih prirasta momenata čvora 7 odgovarajućim prijenosnim koef. MCP-a dobivaju se vrijednosti prenesenih momenata: na pr. 8,7: -16,0445 kNm, na pr. 4,7: -1,7328 kNm, na pr. 5,8 i 8,5: +5,1984 kNm.

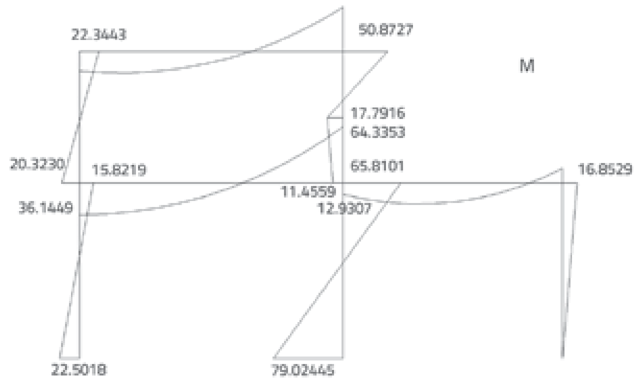
Izračunava se neuravnoteženi moment čvora 4 kao zbroj momenata upetosti presjeka toga čvora i prethodno prenesenih momenata s čvorova 5, 7 i 8, u iznosu od +61,2376 kNm. Množenjem toga neuravnoteženog momenta razdjelnim koef. MCP-a za čvor 4 dobivaju se uravnotežavajući prirasti momenata: za pr. 4,5: -39,5901 kNm, za pr. 4,1: -10,9618



Slika 6. Shema iteracijskoga postupka numeričkog primjera po MCP

kNm, za pr. 4,7: -10.6862 kNm. Množenjem tih raspodijeljenih prirasta momenata čvora 4 odgovarajućim prijenosnim koef. MCP-a dobivaju se vrijednosti prenesenih momenata: na pr. 5,4: -19,7955 kNm, na pr. 1,4: -4,5491 kNm, na pr. 5,2 i 2,5: +5,8909 kNm, na pr. 3,6 i 6,3: +1,8635 kNm, na pr. 7,4: -2,1372 kNm, na pr. 5,8 i 8,5: +6,41172 kNm.
Izračunava se neuravnoteženi moment čvora 6 kao zbroj momenata upetosti presjeka toga čvora i prethodno prenesenih momenata s čvorova 4 i 5, u iznosu od -0,6969 kNm. Množenjem toga neuravnoteženog momenta razdjelnim koef. MCP-a za čvor 6 dobivaju se uravnotežavajući prirasti momenata: za pr. 6,5: +0,56596 kNm, za pr. 6,3: +0,13061 kNm. Množenjem tih raspodijeljenih prirasta momenata čvora 6 odgovarajućim prijenosnim koef. MCP-a dobivaju se vrijednosti prenesenih momenata: na pr. 5,6: +0,28298 kNm, na pr. 3,6: +0,0542 kNm, na pr. 1,4 i 4,1: -0,0222 kNm, na pr. 2,5 i 5,2: -0,070188 kNm.
Konačno, izračunava se moment ležajnoga čvora 3 kao zbroj momenta upetosti tog čvora i prethodno prenesenih momenata s čvorova 4, 5 i 6: +24,4084 kNm. Množenjem ležajnoga momenta razdjelnim koef. MPC-a iznosa -1,0 za čvor 3 dobiva se prirast momenta za pr. 3,6: -24,4084 kNm, čime ukupni moment u zglobnom ležaju u čvoru 3 poprima vrijednost 0. Množenjem raspodijeljenoga prirasta momenata čvora 3 odgovarajućim prijenosnim koef. MCP-a dobivaju se vrijednosti prenesenih momenata: na pr. 6,3: -10,1295 kNm, na pr. 1,4 i 4,1: +4,1494 kNm, na pr. 2,5 i 5,2: +13,11707 kNm.
Tom je radnjom završen prvi krug iteracijskoga postupka. Na slici 6. sve vrijednosti raspodijeljenih i prenesenih momenata prvoga iteracijskog kruga istaknute su bold tipom ispisa. Drugi iteracijski krug započinje jednako kao i prvi, uravnoteživanjem zaostalih neuravnoteženih momenata čvora 5 iz prvoga iteracijskog kruga. Ukupni je neuravnoteženi moment čvora 5 za drugi krug iteracije zbroj prenesenih momenata prvoga iteracijskog kruga s čvorova 3, 4, 6, 7 i 8. Množenjem toga neuravnoteženog momenta razdjelnim koef. MCP-a dobivaju se uravnotežavajući prirasti momenta u drugom iteracijskom krugu. Momenti oko ostalih čvorova uravnotežavaju se istim redoslijedom kao u prvom iteracijskom krugu. Neuravnoteženi su momenti zbrojevi prenesenih momenata iz prethodnoga iteracijskog kruga. Postupak u drugom iteracijskom krugu, uključujući slijed obilaženja čvorova, kao i u svim sljedećim iteracijskim krugovima, potpuno je istovjetan kao u prvom iteracijskom krugu.
Postupak se zaustavlja završetkom onoga iteracijskog kruga za koji su vrijednosti svih prenesenih momenata manji od neke unaprijed zadane vrijednosti.
U ovom je postupku zahtjev bio da su svi preneseni momenti manji od vrijednosti 0,1000 kNm, pa se postupak završio s petim krugom iteracije.
Konačni momenti za svaki presjek dobivaju se kao zbroj svih raspodijeljenih i svih prenesenih momenata svih krugova iteracijskoga postupka osim neuravnoteženih prenesenih momenata posljednjega iteracijskog kruga, koji se zanemaruju, to jest jednostavnim zbrajanjem svih vrijednosti stupca koji na proračunskoj shemi pripada promatranomu presjeku.

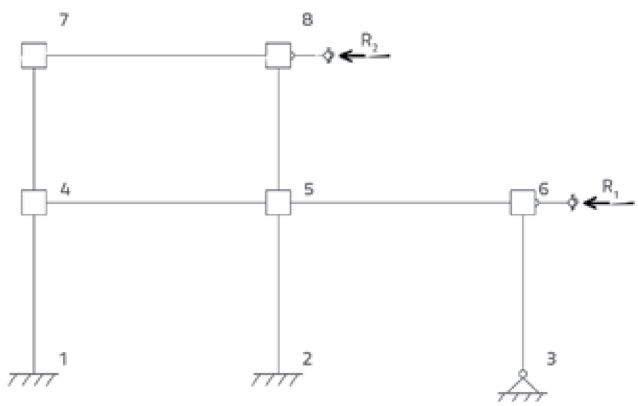
Zbrajanjem dobivenih vrijednosti s proračunske sheme (slika 6.) dobivaju se konačne vrijednosti, zaokružene na četvrtu decimalu, koje su prikazane na slici 7.



Slika 7. Dijagram M za numerički primjer po MPC

4.2. Proračun po KCP-u za translacijski pomične sisteme

Proračun istoga primjera, radi usporedbe s MCP-om, provest će se i pomoću KCP-a u inačici za proračun translacijski pomičnih sistema.
Tijek postupka pratit će korake opisane u [8], u odjeljku 7.1.2., pri čemu će se jedino upotrijebiti drugačiji način označavanja nekih odgovarajućih proračunskih parametara. I ovdje će se dobiveni rezultati zaokruživati na 4 značajne decimalne znamenke.
Oblikujemo pridržani sistem u kojem su spriječeni i zaokreti čvorova i svi neovisni translacijski pomaci konstrukcije (slika 8.): pomak grednoga pojasa prve etaže $\mathbf{u}_1$ i pomak grednoga pojasa druge etaže $\mathbf{u}_2$.



Slika 8. Pridržani sistem za numerički primjer prema KCP

Pomoću poznatih izraza dobivamo momente upetosti u presjecima pridržanoga sistema $\bar{M}_{i,j}$, koji su za sve presjeke jednaki vrijednostima iz odjeljka 3.1.
Primjenom poznatih izraza, upotrijebivši već dobivene vrijednosti za krutosti pojedinih štapnih elemenata, prema [8] dobivamo vrijednosti razdjelnih koeficijenata za KCP:

za čvor 4: $\mu_{4,7}$ = -0,2460, $\mu_{4,1}$ = -0,1845, $\mu_{4,5}$ = -0,5695

za čvor 5: $\mu_{5,2}$ = -0,2801, $\mu_{5,8}$ = -0,1182, $\mu_{5,4}$ = -0,2735, $\mu_{5,6}$ = -0,3282

za čvor 6: $\mu_{6,3}$ = -0,1684, $\mu_{6,5}$ = -0,8316

za čvor 7: $\mu_{7,8}$ = -0,6983, $\mu_{7,4}$ = -0,3017

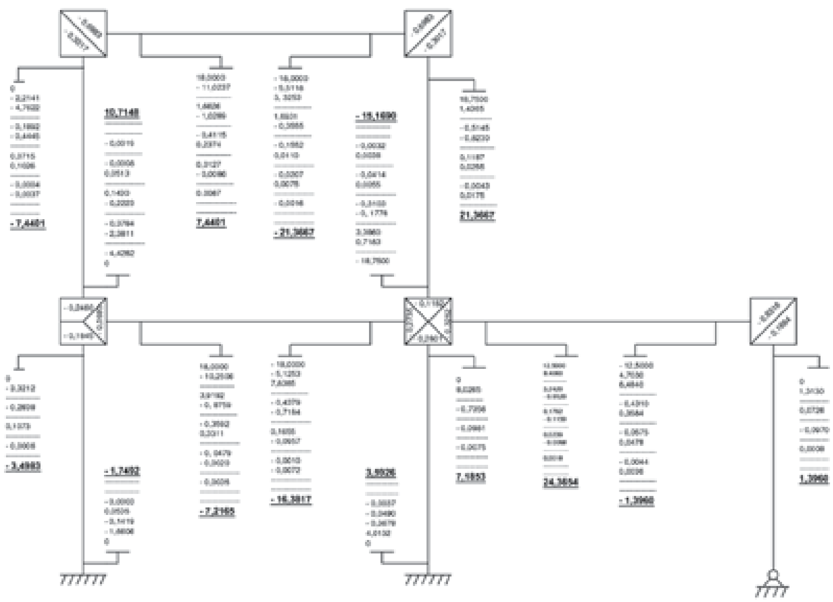
za čvor 8: $\mu_{8,4}$ = -0,6983, $\mu_{8,5}$ = -0,3017

Pritom su za štapni element 3-6 upotrijebljeni izrazi koji uključuju statičku kondenzaciju toga štapnog elementa u odnosu na statički uvjet da je moment u ležaju čvora 3 jednak 0.
Nakon provedenoga iteracijskog postupka KCP (slika 9.), dobivamo momente u presjecima sistema zbog utjecaja vanjskoga opterećenja $M_{i,j}(0)$. Vrijednosti tih momenata na slici 9. označeni su bold tipom slova.
Primjenjujući poznati izraz za vrijednosti poprečnih sila na krajevima štapnog elementa

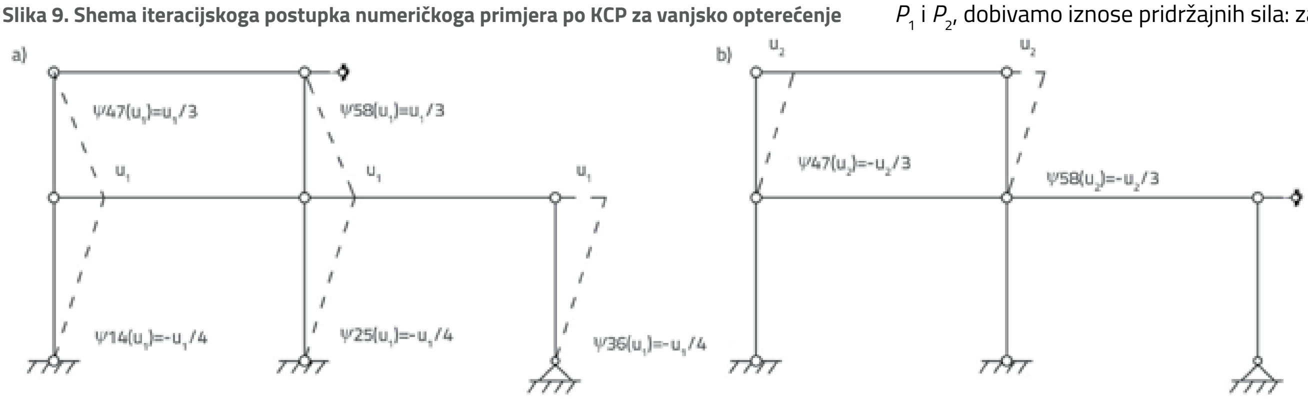
$$T_{i,j} = \frac{M_{i,j} + M_{j,i}}{h_{i,j}} + T_{i,j}^{(0)}$$

gdje je $T_{i,j}^{(0)}$ vrijednost poprečne sile od vanjskog opterećenja na prostoj gredi, a $h_{i,j}$ duljina štapnoga elementa *i–j* (u ovom slučaju visina stupa *i–j*), iz dobivenih vrijednosti za $M_{i,j}(0)$ dobivamo vrijednosti poprečnih sila $T_{i,j}(0)$ u presjecima stupova sistema.
Nakon izoliranja grednih pojaseva pojedinih etaža tako da se presijeku svi stupovi te etaže i etaže neposredno iznad te oslobode pripadajuće poprečne sile stupova, odgovarajuće jednadžbe ravnoteže horizontalnih sila koje djeluju na izolirani gredni pojas daju iznose pridržajnih sila (slika 8.): za prvu etažu $R_1(0) = P_2 - T_{4,1}(0) - T_{5,2}(0) - T_{6,3}(0) + T_{4,7}(0) + T_{5,8}(0)$ = 10,4488 kN, a za drugu etažu $R_2(0) = P_1 - T_{7,4}(0) - T_{8,5}(0)$ = 37,8196 kN.

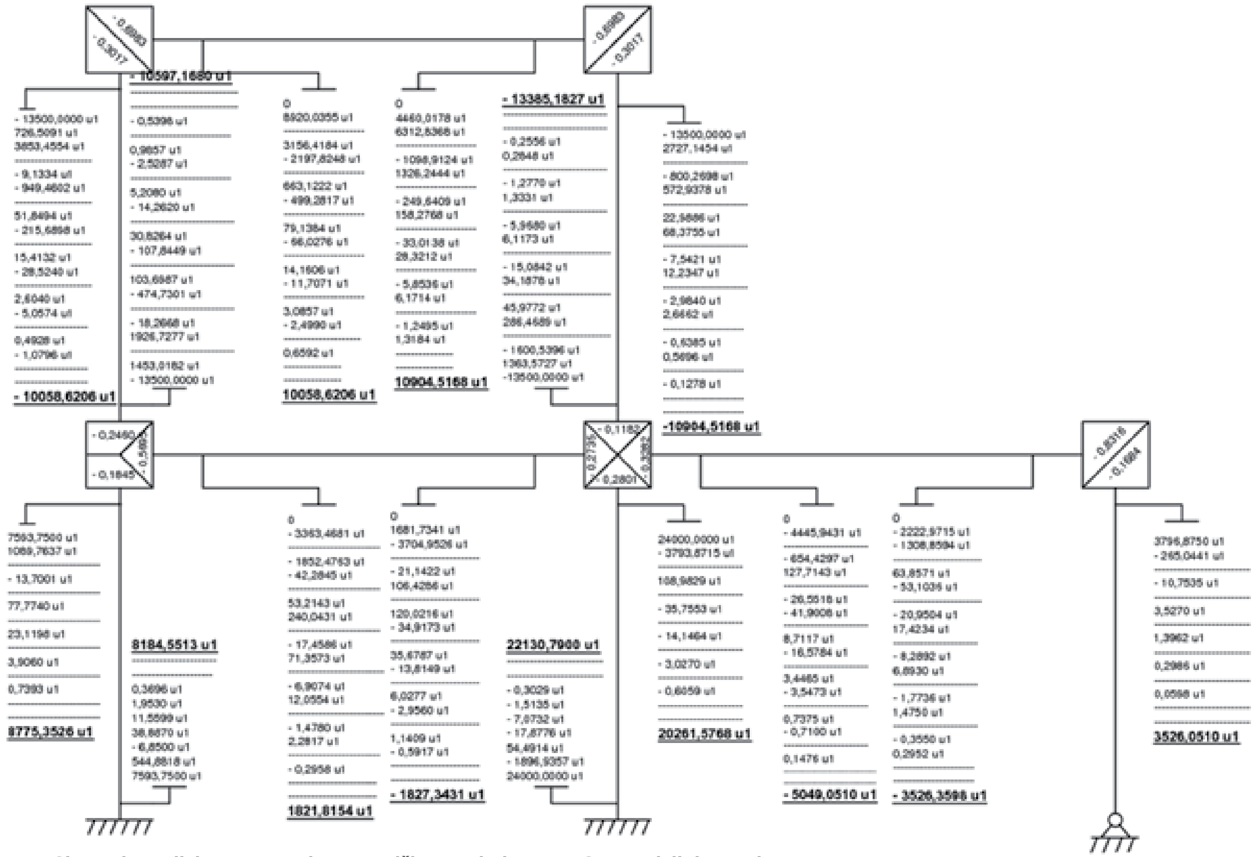
Za određivanje utjecaja prethodno pridržanih translacijskih pomaka oblikuje se zglobna shema. Zadajemo prisilni pomak $\boldsymbol{u_1}$ (slika 10.a)).
Primjenom poznatih izraza za momente na krajevima štapnoga elementa za utjecaj zaokretanja elementa i primjenivši za štapni element 3–6 statičku kondenzaciju dobivamo vrijednosti momenata upetosti od utjecaja pomaka u1, koje su prikazane na slici 11.
S tim se vrijednostima momenata kao početnim vrijednostima ponovno provodi KCP (slika 11.)
Nakon provedenoga iterativnog postupka KCP (slika 11.) dobivamo momente u presjecima sistema zbog utjecaja pomaka $\boldsymbol{u_1}$, $M_{i,j}(u_1)$, koji su prikazani na slici 11.
Iz dobivenih vrijednosti za $M_{i,j}(u_1)$ dobivamo vrijednosti poprečnih sila $T_{i,j}(u_1)$ u presjecima stupova sistema, na isti način kao za slučaj vanjskoga opterećenja.
Iz odgovarajućih jednadžbi ravnoteže horizontalnih sila koje djeluju na izolirane gredne pojaseve, na isti način kao za vanjsko djelovanje, uz razliku da u jednadžbama nema utjecaja opterećenja P_1 i P_2, dobivamo iznose pridržajnih sila: za



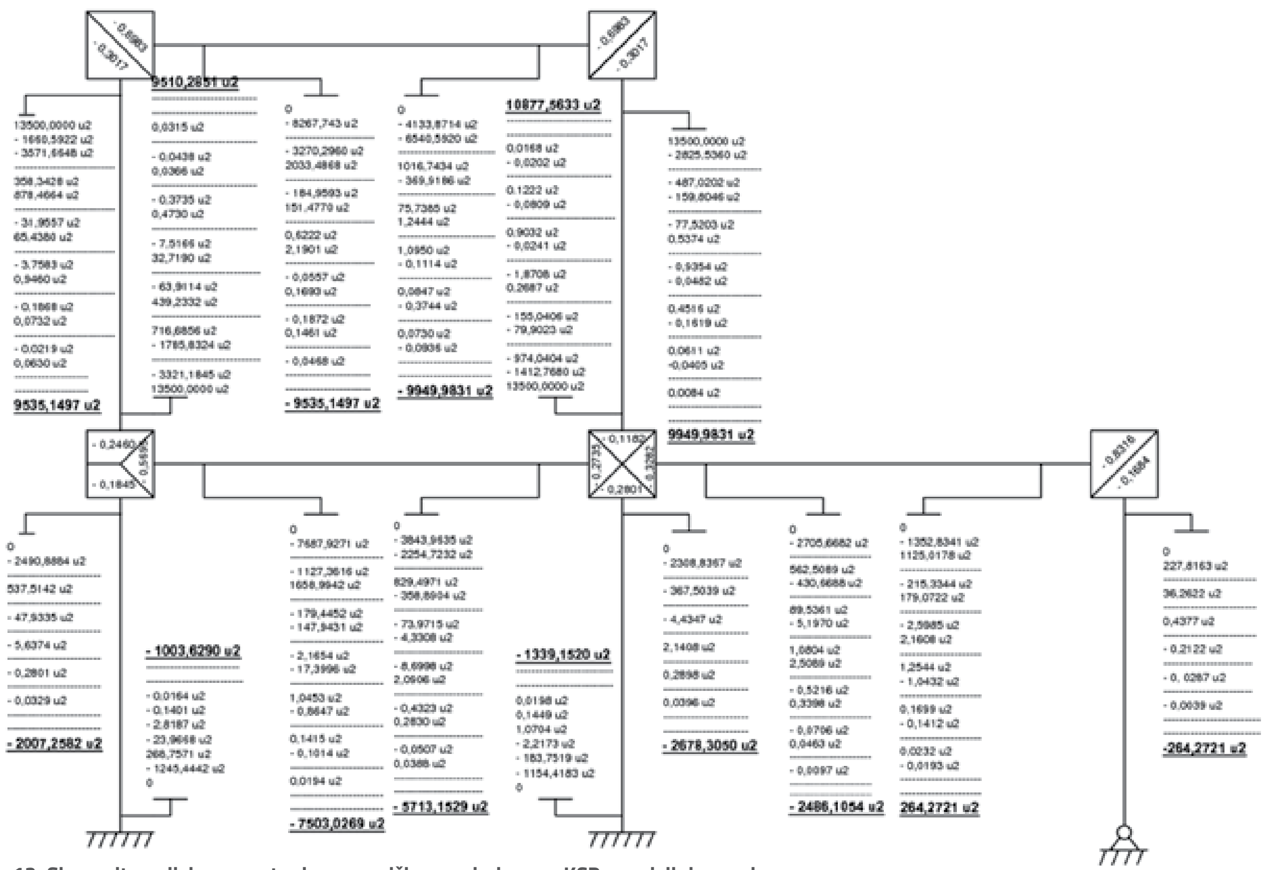
Slika 9. Shema iteracijskoga postupka numeričkoga primjera po KCP za vanjsko opterećenje



Slika 10. Zglobna shema za numerički primjer za pomake u_1 i u_2



Slika 11. Shema iteracijskoga postupka numeričkoga primjera po KCP za prisilni pomak u_1



lika 12. Shema iteracijskoga postupka numeričkoga primjera po KCP za prisilni pomak u_2

prvu etažu $R_1(u_1)$ = -30701,4866·u_1, a za drugu etažu $R_2(u_1)$ = 14981,8293·u_1.
Zadajemo prisilni pomak $\boldsymbol{u_2}$ (slika 10.b).
Vrijednoti momenata upetosti mi,j(u2) zbog utjecaja u2 prikazani su na slici 12.
S tim vrijednostima momenata kao početnim vrijednostima ponovo se provodi KCP (slika 12.).
Nakon provedenoga iteracijskog postupka KCP dobivamo momente u presjecima sistema zbog utjecaja pomaka u2, Mi,j(u2), vrijednosti kojih su na slici 12. označeni bold tipom slova.
Iz odgovarajućih jednadžbi ravnoteže horizontalnih sila koje djeluju na izolirane gredne pojaseve, na isti način kao za slučaj pomaka u1, dobivamo iznose pridržajnih sila: za prvu etažu R1(u2) = 14982,0119·u2, a za drugu etažu R2(u2) = -13290,9937·u2.
Ukupne pridržajne sile u svim pridržanjima dobivaju se zbrajanjem svih doprinosa:
Ri = Ri(0) + Ri(u1) + Ri(u2), gdje je i = 1, 2 numeracija etaža.
Konačne vrijednosti svake pridržajne sile, u skladu s činjenicom da u izvornom sistemu ne postoje pridržanja, mora biti nula: Ri = 0. Primjenom toga uvjeta dobivamo jednadžbe
R1 = 10,4488 – 30701,4866·u1 + 14982,0119·u2 = 0,
R2 = 37,8196 + 14981,8293·u1 – 13290,9937·u2 = 0.
Dobivene jednadžbe predstavljaju sustav od dvije linearne algebarske jednadžbe s dvije nepoznanice u kojem su nepoznanice tražene vrijednosti translacijskih pomaka grednih pojaseva konstrukcije.
Rješenja za translacijske pomake jesu: u1 = 384,2629·10-5 m i u2 = 717,6981·10-5 m.
Konačne vrijednosti momenata u presjecima sistema dobivaju se zbrajajem svih doprinosa:
Mi,j = Mi,j(0) + Mi,j(u1) + Mi,j(u2). Uvrštavanjem dobivenih vrijednosti translacijskih pomaka u taj izraz za svaki presjek dobivaju se konačne vrijednosti momenata u svim presjecima. Rezultati su prikazani u tablici 1. zajedno s rezultatima ostalih proračunskih postupaka.

4.3. Usporedba proračunskih postupaka

U tablici 1. prikazane su vrijednosti momenata (u kNm) u presjecima konstrukcije iz numeričkog primjera sa slike 5. za MCP i za KCP.
Usporedba rezultata pokazuje da je najveće relativno odstupanje rezultata po MCP-u od rezultata po KCP-u 0,4014%, dok je najmanje relativno odstupanje 0,0032%, što se tumači nagomilavanjem pogrešaka u postupku zaokruživanja pojedinačnih rezultata.
Usporedbom tijekova rješavanja MCP-a i KCP-a uočavaju se bitne prednosti MCP-a u odnosu na KCP: 1. MCP bez obzira na broj etaža i broj polja okvirne konstrukcije rješenja dobiva nakon samo jednoga iteracijskoga postupka, za razliku od KCP-a u kojemu treba provesti n+1 pojedinačni postupak iteracije (gdje je n broj etaža okvira), što MPC čini očevidno vremenski ekonomičnijim, preglednijim i učinkovitijim postupkom; 2. Za razliku od KCP-a, MCP u sebi ne sadrži potrebu proračunavanja poprečnih sila u stupovima, niti potrebu proračunavanja pridržajnih sila, te time dodatno smanjuje potrebno proračunsko vrijeme i povećava ekonomičnost u odnosu na KCP; 3. Najveća je prednost MCP-a u odnosu na KCP potpuno uklanjanje potrebe rješavanja sustava linearnih algebarskih jednadžbi za nalaženje iznosa nepoznatih translacijskih pomaka tako da postupak od početka do kraja ostaje u području najjednostavnijih matematičkih procedura svedenih na jednostavne aritmetičke operacije među brojevima.

Tablica 1. Usporedni rezultati numeričkoga primjera za MCP i za KCP

Proračunski postupak / Presjek	KCP	MCP
$M_{1,4}$	22,4980	22,5018
$M_{2,5}$	79,0219	79,0244
$M_{4,1}$	15,8159	15,8219
$M_{4,7}$	20,3177	20,3230
$M_{4,5}$	-36,1336	-36,1449
$M_{5,2}$	65,8209	65,8101
$M_{5,8}$	11,4648	11,4559
$M_{5,4}$	-64,4067	-64,3353
$M_{5,6}$	-12,8790	-12,9307
$M_{6,3}$	16,8432	16,8529
$M_{6,5}$	-16,8432	-16,8529
$M_{7,4}$	22,3419	22,3443
$M_{7,8}$	-22,3419	-22,3443
$M_{8,5}$	50,8755	50,8727
$M_{8,7}$	-50,8755	-50,8727

Ako analiziramo broj potrebnih koraka, to jest pojedinačnih procedura postupka, tada proizlazi da KCP u sebi sadrži sljedeće procedure: izračunavanje vrijednosti momenata upetosti te razdjelnih i prijenosnih koeficijenata; iteracijski postupak koji se provodi n+1 puta; izračunavanje poprečnih sila stupova, koji se provodi n+1 puta; izračunavanje vrijednosti pridržajnih sila koji se koji se provodi n+1 puta; rješavanje sustava n linearnih algebarskih jednadžbi s n nepoznanica; uvrštavanje dobivenih vrijednosti translacijskih pomaka i zbrajanje pojedinačnih doprinosa da bi se dobile konačne vrijednosti.
Dakle, za okvirnu konstrukciju s n etaža u KCP-u treba provesti 3+3(n+1) pojedinačnih koraka (procedura).
S druge strane, MCP u sebi sadrži uvijek samo dva pojedinačna koraka (procedure): izračunavanje vrijednosti momenata upetosti te razdjelnih i prijenosnih koeficijenata; iteracijski postupak koji se uvijek provodi samo jedanput, bez obzira na broj etaža. Prednost MCP-a u odnosu na KCP u pogledu broja potrebnih koraka (pojedinačnih procedura postupka) više je nego očevidan. Primjerice, za okvirnu konstrukciju s n = 5 etaža

za provedbu KCP-a potreban je 3+3(5+1) = 21 pojedinačni korak (procedura), dok su za MCP potrebna (uvijek) samo 2 koraka.

5. Zaključak

Opisanim je MCP-om, kao što je pokazano, postignuto značajno unapređenje KCP-a za proračun ravninskih pomičnih okvirnih konstrukcija. Osnovna zamisao KCP-a da se ravnoteža postiže uzastopnim proračunavanjem *raspodijeljenih* i *prenesenih* momenata u iteracijskom postupku postupnim približavanjem točnomu rješenju zadržana je i u MCP-u s tim da se, za razliku od KCP-a, ravnoteža sistema postiže na osnovnom sistemu u kojem su spriječeni kutovi zaokreta, ali nisu spriječeni horizontalni pomaci čvorova (slika 1.b). Ta značajna razlika u odnosu na odabir osnovnoga proračunskog sistema rezultira potpuno drugačijim izrazima za *razdjelne* i *prijenosne* koeficijente MCP-a u odnosu na KCP.
U modificiranom se postupku konačni rezultat dobiva uvijek nakon samo jednog iteracijskoga postupka, za razliku od KCP-a u kojem se konačni rezultat dobiva zbrajanjem rezultata većega broja pojedinačnih iteracijskih postupaka. Broj je potrebnih pojedinačnih iteracijskih postupaka KCP-a n+1, gdje je n broj etaža promatrane pomične okvirne konstrukcije, tako da je očevidna enormna ušteda proračunskoga vremena. Uz to, za razliku od KCP-a, u MCP-u je uklonjena potreba za rješavanjem sustava n linearnih jednadžbi s n nepoznanica, čime je postupak dodatno pojednostavnjen.
Iz prikazanoga proizilazi da je MCP pogodan kao algoritamska osnova za oblikovanje manjih korisničkih računalnih programa za proračun translacijski pomičnih okvirnih ravninskih konstrukcija, neovisno o broju polja i broju etaža okvira, bez upotrebe komercijalnih proračunskih programa.
U odnosu na postupak po Csonki i Werneru postupak MCP je nemjerljivo dominantniji za širi spektar okvirnih konstrukcija, jer, za razliku od postupka po Csonki i Werneru, MCP nema ograničenje samo na okvirne konstrukcije s istim visanama stupova prve etaže, nema ograničenja na nužnu istovjetnost ležaja prve etaže konstrukcije, niti ima ograničenja na moguće zglobne spojeve između štapnih elemenata. Upravo zbog ovoga ograničenja metode po Csonki i Werneru u ovom radu nije bilo moguće usporediti prikazanu MCP s metodom po Csonki i Werneru, jer numerički primjer sadrži kombinaciju upetih i zglobnih ležajeva stupova prve etaže, što, kako je rečeno, postupak po Csonki i Werneru ne može riješiti.

LITERATURA

[1] Čališev, K.: Izračunavanje višestruko statički neodređenih sistema pomoću postepenih aproksimacija, Tehnički list Udruženja jugoslavenskih inženjera i arhitekata, 5 (1923) 17, pp. 125 – 127, 18/19, pp. 141 – 143, 20, 151 – 154, 21, 157 – 158

[2] Čališev, K.: Primijenjena statika , Tehnička knjiga, Zagreb, 1951.

[3] Samuelsson, A., Zienkiewicz, O.C.: History of the Stiffness Method, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 67 (2006), pp. 149 – 157.

[4] Fresl, K., Gidak, P., Hak, S : Iz povijesti razvoja iteracijskih postupaka, Građevinar, 62 (2010) 10, pp. 959 – 970.

[5] Cross, H.: Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments, Proceedings of the ASCE, 57 (1930), pp. 919-928

[6] Cross, H.: Analysis of Continuous Frames by Distributing Fixed-End Moments, Transactions of the ASCE 96 (1932), pp. 1 -10

[7] Volokh, K.Y.: On Foundations of the Hardy Cross Method, International Journal of Solids and Structures, 39 (2002), pp. 4197-4200.

[8] Anđelić, M.: Statika neodređenih štapnih konstrukcija, Stručna biblioteka, Serija Priručnici, Knjiga 5, Društvo hrvatskih građevinskih konstruktera, Zagreb, 1993.

[9] Csonka, P.: Une Contribution a la Simplification de la Methode de Hardy Cross, La Technique Moderne – Construction, 3 (1952).

[10] Simović, V.: Zidovi s otvorima i okvirne konstrukcije, Tehnička knjiga, Zagreb, 1971.

[11] Simović, V.: Proračun horizontalno pomičnih okvira, Građevinar, 18 (1966) 1, pp. 1 – 14

[12] Simić, M.: Prilog pojednostavljenju Krosove metode_od profesora Csonka, Građevinar, 4 (1952) 7/8, pp. 30 – 47

[13] Kani, G.: Die Berechnung Mehrstockiger Rahmen, Verlag Konrad Wittwer, Stuttgaart, 1949.

[14] Kassimali, A.: Structural Analysis, Cangage Learning, Stamford, USA, 2011.

[15] Hibbeler, R.C.: Structural Analysis, Prentice Hall, 2009

[16] Leet, K.M., Uang, C.M., Gilbert, A.M.: Fundamentals of Structural Analysis, McGraw Hill Higher Education, New York, USA, 2008.

[17] Wagner, W., Erlhof, G.: Praktische Baustatik, Teil 3, Sechste Auflage, B.G. Teubner, Stuttgart, 1977.