

# Analiza prednapetih betonskih ljusaka pod dugotrajnim opterećenjem

Jure Radnić, Domagoj Matešan, Nikola Grgić

## Ključne riječi

prednapeta betonska ljuska, numerički model, nelinearna analiza, eksperimentalno ispitivanje, dugotrajno opterećenje, kratkotrajno opterećenje

## Key words

prestressed concrete shell, numerical model, nonlinear analysis, experimental testing, long-term load, short-term load

## Mots clés

coque en béton précontraint, modèle numérique, analyse non-linéaire, essai expérimental, charge à long terme, charge à court terme

## Ключевые слова

предварительно напряженная бетонная оболочка, цифровая модель, нелинейный анализ, экспериментальное испытание, длительная нагрузка, короткая нагрузка

## Schlüsselworte

vorgespannte Betonschale, numerisches Modell, unlineare Analyse, experimentale Untersuchung, langdauernde Belastung, kurzdauernde Belastung

J. Radnić, D. Matešan, N. Grgić

Izvorni znanstveni rad

## Analiza prednapetih betonskih ljusaka pod dugotrajnim opterećenjem

Prikazan je numerički model za materijalnu i geometrijsku nelinearnu analizu prednapetih betonskih ploča i ljusaka opterećenih kratkotrajnim i dugotrajnim statičkim opterećenjem, provedenim bez rasterećenja. Simulirani su najvažniji nelinearni efekti ponašanja betona, betonskog čelika i prednapete armature. Opisani numerički model provjeren je na rezultatima provedenog eksperimentalnog ispitivanja prednapete betonske ljuske opterećene kratkotrajnim i dugotrajnim opterećenjem.

J. Radnić, D. Matešan, N. Grgić

Original scientific paper

## Analysis of prestressed concrete shells subjected to long-term load

A numerical model for the material and geometric non-linear analysis of prestressed concrete slabs and shells subjected to short-term and long-term static load, applied without release of load, is presented. Most significant non-linear effects exhibited by concrete, concrete steel, and prestressed steel, are simulated. The described numerical model is verified through results obtained by experimental testing of a prestressed concrete shell subjected to short-term and long-term load.

J. Radnić, D. Matešan, N. Grgić

Ouvrage scientifique original

## Analyse des coques en béton précontraint assujetties à une charge à long terme

Un modèle numérique pour l'analyse non-linéaire géométrique et matérielle des dalles et coques en béton précontraint, assujetties à la charge statique à court et long terme, appliquée sans relâchement, est présenté. Les effets non-linéaires les plus importants sur le comportement du béton, de l'acier et de l'acier précontraint, sont simulés. Le modèle numérique décrit est vérifié à travers les résultats des essais expérimentaux de la coque en béton précontraint assujettie à la charge à court et long terme.

Ю. Раднич, Д. Матешан, Н. Гргич

Оригинальная научная работа

## Анализ предварительно напряженной бетонной оболочки при длительной нагрузке

Приведена цифровая модель для материального и геометрического нелинейного анализа предварительно напряженных бетонных плит и оболочки, находящихся под действием коротких и длительных статических нагрузок, проведенного без разгрузки. Моделировались важнейшие нелинейные эффекты поведения бетона, арматурной стали и предварительно напряженной арматуры. Описанная цифровая модель проверена по результатам проведенного экспериментального испытания предварительно напряженной бетонной оболочки, находящейся под действием коротких и длительных нагрузок.

J. Radnić, D. Matešan, N. Grgić

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

## Analyse vorgespannter Betonschalen unter langdauernder Belastung

Dargestellt ist ein numerisches Modell für die materielle und geometrische unlineare Analyse vorgespannter Betonplatten und -Schalen belastet durch kurz- und langdauernde statische Belastung, durchgeführt ohne Entlastung. Simuliert sind die wichtigsten unlinearen Effekte des Verhaltens von Beton, Betonstahl und Vorspannungsbewehrung. Das beschriebene numerische Modell überprüfte man durch die Ergebnisse der durchgeführten experimentalen Untersuchung der vorgespannten Betonschale, belastet durch kurz- und langdauernde Belastung.

Autori: Prof. dr. sc. **Jure Radnić**, dipl. ing. grad.; doc. dr. sc. **Domagoj Matešan**, dipl. ing. grad.; **Nikola Grgić**, dipl. ing. grad., Građevinsko-arhitektonski fakultet Sveučilišta u Splitu, Matice hrvatske 15, Split

1 Uvod

Eksperimentalna ispitivanja betonskih ploča i ljsusaka, kao i razvoj numeričkih modela za simulaciju njihova ponašanja, još su uvijek predmet istraživanja brojnih istraživača. Neki radovi autora ovog članka iz područja betonskih ploča i ljsusaka navedeni su u popisu literature [1-12]. U radovima [1-3] prikazani su rezultati eksperimentalnog ispitivanja betonske ploče, a u radovima [4-6] rezultati eksperimentalnog ispitivanja prednapete betonske ljsuske pod kratkotrajnim i dugotrajnim statičkim opterećenjem. Numerički modeli za statičku i dinamičku analizu betonskih ploča i ljsusaka opisani su u radovima [7-10]. Numerički model za simulaciju geometrijske nelinearnosti ljsusaka prikazan je u radu [11], a numerički model za proračun betonskih ljsusaka pod dugotrajnim opterećenjem, s uključenjem puzanja i skupljanja betona, dan je u radu [12].

U ovom radu prikazan je model za materijalnu i geometrijsku nelinearnu analizu prednapetih betonskih ploča i ljsusaka pod kratkotrajnim i dugotrajnim statičkim opterećenjem. Simulirani su utjecaji puzanja i skupljanja betona, kao i najvažniji nelinearni efekti vezani za čelik za armiranje i čelik za prednapinjanje. Prikazani su samo rezultati istraživanja koja predstavljaju nastavak navedenih u radovima [1-12]. Opisano je modeliranje natege, modeliranje gubitaka sile prednapinjanja, modeliranje prijenosa sile s natege na beton te numerički postupak rješenja problema. Izloženi numerički model provjeren je na rezultatima eksperimentalnog ispitivanja prednapete betonske ljsuske pod kratkotrajnim i dugotrajnim opterećenjem [4-6]. Model nije namijenjen problemu dugotrajnog opterećenja s rasterećenjem.

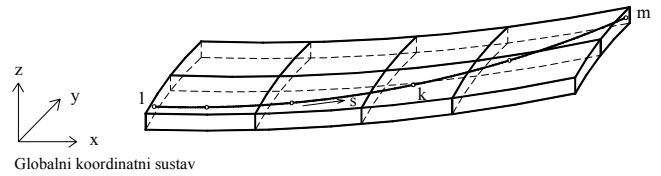
2 Modeliranje prednapete armature

2.1 Opis geometrijskog oblika natege

Geometrijski oblik natege zadaje se s pomoću koordinata točaka kroz koje prolazi os natege (slika 1.), izrazom

$$\mathbf{x}_p(s) = \sum_{k=1}^m L_k(s) \mathbf{x}_{p,k} \quad (1)$$

gdje je  $\mathbf{x}_p(s)$  vektor koji opisuje geometrijski oblik natege,  $L_k$  su Lagrangeove interpolacijske funkcije, a  $\mathbf{x}_{p,k}$  je vektor koji sadrži globalne koordinate od  $m$ -točaka u kojima je natega definiran.



Slika 1. Geometrijski oblik natege

Raznim "automatskim" postupcima mogu se odrediti elementi ljsuske koji su presječeni nategom [13], [14]. Osim toga, mogu se proračunati koordinate točaka sjecišta natege s elementom ljsuske u prirodnom koordinatnom sustavu  $(\xi, \eta, \zeta)_{p,i}$  preko sljedećeg sustava nelinearnih jednadžbi

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{x}_p(s) \quad (2)$$

gdje  $\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta)$  definira geometrijski oblik presječenih konačnih elemenata. Kod zakrivljenih izoparametarskih elemenata ljsuske [15], geometrijski oblik ljsuske eksplicitno se opisuje izrazom:

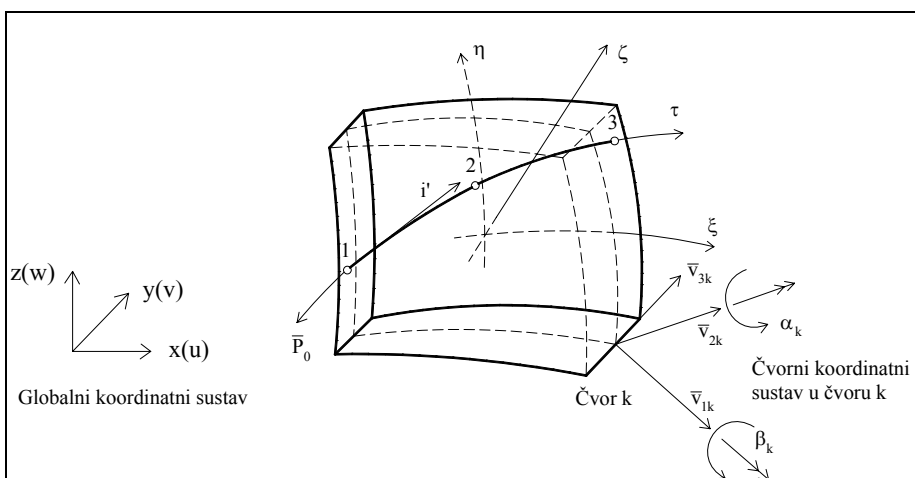
$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \mathbf{x}_i^{srednje} + \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \frac{h_i}{2} \zeta \bar{\mathbf{v}}_{3,i} \quad (3)$$

gdje je  $n$  broj čvorova pojedinog elementa,  $N_i(\xi, \eta)$  su bazne funkcije za  $\xi = \text{konst.}$ ,  $\mathbf{x}_i$  su koordinate srednje ravnine,  $h_i$  je debljina ljsuske za  $i$ -ti čvor, a  $\bar{\mathbf{v}}_{3,i}$  je jedinični vektor koji definira smjer normale u čvoru  $i$ .

Slično prethodnome, koordinate  $\xi, \eta, \zeta$  srednjeg čvora jednodimenzijskog elementa natege (čvor 2 na slici 2.) dobivaju se sustavom jednadžbi:

$$\mathbf{x}(\xi, \eta, \zeta) = \mathbf{x}_p(s_2) \quad (4)$$

gdje je  $s_2 = (s_1 + s_3)/2$  duljina natege između referentnih točaka koje se promatraju.



Slika 2. Prednapeta natega ugrađena u element ljsuske

Kada se proračunaju krivolinijske koordinate  $(\xi, \eta, \zeta)_{p,i}$  za čvorove elementa natege, tada su s pomoću izraza (3) definirane odgovarajuće globalne koordinate  $\mathbf{x}_{p,j}$ . Prema tome, geometrijski oblik segmenta natege uključene u element ljsuske (slika 2.) može se opisati izrazom:

$$\mathbf{x}_p(\tau) = \sum_{j=1}^3 N'_j(\tau) \mathbf{x}_{p,j} \quad (5)$$

gdje su  $N'_j(\tau)$  bazne funkcije usvojene za jednodimenzijski parabolični element [16], a  $\tau$  je odgovarajuća krivolinijska koordinata.

## 2.2 Formulacija prijanjajućih natega

### 2.2.1 Općenito

Razlika prethodno napetih i naknadno napetih konstrukcija je u vezi betona i prednapetog čelika, odnosno u prionjivosti (vezi) natega i betona. Kod prethodno napetih konstrukcija osigurana je čvrsta veza betona i prednapetog čelika slično kao betona i čelika za armiranje, s odgovarajućom prionjivošću. Kod naknadno napetih konstrukcija čvrsta veza natega i betona stvara se tek nakon napinjanja i injektiranja prostora oko natega, odnosno nakon očvršćivanja injekcijske smjese (tzv. prijanjajuće natege). Ako prostor između natega i betona nije injektiran, nema prijanjanja betona i natege (tzv. slobodne natege). Modeliranje mehaničkih efekata prijanjanja betona i natega zahtijeva sljedeće korake: (i) uključenje doprinosa napinjanja globalnoj krutosti, (ii) proračun prirasta deformacija prouzročenih napinjanjem, kao vanjskog opterećenja na konstrukciju, te (iii) proračun konačne sile u natezi i generiranje unutrašnjih sila od napinjanja. Primjena prvog navedenog koraka ubrzat će konvergenciju postupka, iako većina postupaka rješavanja ne zahtijeva točnu matricu krutosti.

Kod prethodno napetih natega veza beton-natega je stalno osigurana, tako da se koraci (i)-(iii) izvode u svakom inkrementu opterećenja. Prirast deformacije proračuna se za svako djelovanje čvornih sila od prednapinjanja. Gubici sile prednapinjanja od elastičnog skraćenja betona uključeni su automatski.

Modeliranje naknadno napetih natega teče u dvije faze:

- (a) Veza betona i napetog čelika ne uzima se u obzir u svim fazama prednapinjanja. Prirast deformacija u napetom čeliku ne javlja se prije nego što se natega napinje.
- (b) U kasnijim fazama uzima se "nepotpuna" veza između betona i napetog čelika te se koraci (i)-(iii) izvode sukcesivno.

### 2.2.2 Matrica deformacija

Izraz (5) definira globalne koordinate  $\mathbf{x}_p(\tau)$  opće točke elementa natege. Pretpostavlja se lokalni koordinatni sustav  $\mathbf{x}'_p(\tau)$  s ortogonalnim osima, gdje je prva koordinatna os u smjeru tangente na os natege, a odgovarajući jedinični vektor  $\mathbf{i}'$  je oblika:

$$\mathbf{i}' = \frac{\mathbf{v}(\tau)}{v} = \frac{1}{v} \left( \frac{dx}{d\tau} \mathbf{i} + \frac{dy}{d\tau} \mathbf{j} + \frac{dz}{d\tau} \mathbf{k} \right) = \frac{1}{v} (a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}) \quad (6)$$

gdje je

$$v = \|\mathbf{v}(\tau)\| = \left[ \left( \frac{dx}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \left( \frac{dz}{d\tau} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (7)$$

Jedinični vektori koji definiraju ostale dvije lokalne osi mogu se uzeti kao

$$\mathbf{j}' = \frac{1}{(b^2 + a^2)^{1/2}} (-b\mathbf{i} + a\mathbf{j}); \quad \mathbf{k}' = \frac{\mathbf{i}' \times \mathbf{j}'}{\|\mathbf{i}' \times \mathbf{j}'\|} \quad (8)$$

Matrica transformacije  $\theta$ , koja povezuje lokalni i globalni koordinatni sustav, može se dobiti iz izraza (6) - (8). Ona sadrži komponente normaliziranih lokalnih vektora  $(\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}')$  u globalnom koordinatnom sustavu. Parcijalne derivacije pomaka u lokalnom koordinatnom sustavu povezane su s odgovarajućim derivacijama u globalnom koordinatnom sustavu s pomoću:

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = \theta^T \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \theta \quad (9)$$

Kako se uzimaju samo uzdužne deformacije natege, izraz (9) može se pojednostavniti kao

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{x'} = \frac{\partial u'_i}{\partial x_i} = [abc] \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (10)$$

gdje se parcijalne derivacije pomaka  $\partial u_k / \partial x_i$  mogu dobiti iz izraza za pomake čvorova konačnog elementa, korištenih za diskretizaciju konstrukcije. Matrica deformacija natege  $\mathbf{B}_p$ , koja povezuje uzdužnu deformaciju prednapetog elementa sa stupnjevima slobode elementa ljsuske, tada se definira izrazom:

$$\varepsilon_p = \mathbf{B}_p(\tau) \mathbf{d} \quad (11)$$

Matrica deformacija jednodimenzijskog elementa natege ugrađene u degenerirani element ljsuke može se rastaviti na linearni i nelinearni dio.

Za slučaj linearne geometrijske analize, matrica deformacija elementa natege za  $i$ -ti čvor elementa ljsuke može se napisati kao:

$$\varepsilon_{x'} = \frac{\partial u'}{\partial x'} = \mathbf{B}_{p,L} \mathbf{d} = [\dots \quad B_{1i} \quad B_{2i} \quad B_{3i} \quad B_{4i} \quad B_{5i} \quad \dots] \begin{bmatrix} \vdots \\ u_i \\ v_i \\ w_i \\ \alpha_i \\ \beta_i \\ \vdots \end{bmatrix} \quad (12)$$

gdje su:

$$B_{1i} = \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad (13a)$$

$$B_{2i} = \left( ab \frac{\partial \xi}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left( ab \frac{\partial \eta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad (13b)$$

$$B_{3i} = \left( ac \frac{\partial \xi}{\partial x} + bc \frac{\partial \xi}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + \left( ac \frac{\partial \eta}{\partial x} + bc \frac{\partial \eta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \quad (13c)$$

$$B_{4i} = \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{1,j}^x + \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{1,j}^x + \left( a^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + ab \frac{\partial \zeta}{\partial y} + ac \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{1,j}^x + \left( ab \frac{\partial \xi}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{1,j}^y + \left( ab \frac{\partial \eta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{1,j}^y + \left( ab \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{1,j}^y + \left( ac \frac{\partial \xi}{\partial x} + bc \frac{\partial \xi}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{1,j}^z + \left( ac \frac{\partial \eta}{\partial x} + bc \frac{\partial \eta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{1,j}^z + \left( ac \frac{\partial \zeta}{\partial x} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{1,j}^z \quad (13d)$$

$$B_{1i} = - \left( a^2 \frac{\partial \xi}{\partial x} + ab \frac{\partial \xi}{\partial y} + ac \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{2,j}^x - \left( a^2 \frac{\partial \eta}{\partial x} + ab \frac{\partial \eta}{\partial y} + ac \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{2,j}^x - \left( a^2 \frac{\partial \zeta}{\partial x} + ab \frac{\partial \zeta}{\partial y} + ac \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{2,j}^x - \left( ab \frac{\partial \xi}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \xi}{\partial y} + bc \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{2,j}^y - \left( ab \frac{\partial \eta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \eta}{\partial y} + bc \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{2,j}^y - \left( ab \frac{\partial \zeta}{\partial x} + b^2 \frac{\partial \zeta}{\partial y} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{2,j}^y - \left( ac \frac{\partial \xi}{\partial x} + bc \frac{\partial \xi}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \xi}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{2,j}^z - \left( ac \frac{\partial \eta}{\partial x} + bc \frac{\partial \eta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{2,j}^z - \left( ac \frac{\partial \zeta}{\partial x} + bc \frac{\partial \zeta}{\partial y} + c^2 \frac{\partial \zeta}{\partial z} \right) N_i \frac{h_i}{2} \mathbf{v}_{2,j}^z \quad (13e)$$

### 2.2.3 Matrica krutosti

Prednapete natege pridonose krutosti elemenata ljsuke u koju su ugrađene. Matrica krutosti natege  $\mathbf{K}_p$  dana je izrazom:

$$\mathbf{K}_p = \int_{l_p} \mathbf{B}_p^T E_p \mathbf{B}_p A_p dl \quad (14)$$

gdje je  $E_p$  modul elastičnosti prednapetog čelika,  $A_p$  ploština poprečnog presjeka natege, a  $l_p$  je duljina segmenta natege koji je uključen u element ljsuke.

Ako se (14) izrazi s pomoću krivolinijskih koordinata natege  $\tau$ , te ako se povežu čvorovi  $i$  i  $j$  elementa ljsuke, dobiva se submatrica  $(\mathbf{K}_{ij})_p$  kao:

$$(\mathbf{K}_{ij})_p = \int_{-1}^1 (\mathbf{B}_i)_p^T E_p (\mathbf{B}_j)_p \nu d\tau \quad (15)$$

koja se može proračunati numeričkom integracijom:

$$(\mathbf{K}_{ij})_p = \sum_{k=1}^{\text{NGAUS}} (\mathbf{B}_i(\xi, \eta, \zeta)_k)_p^T (E_k)_p \times A_p (\mathbf{B}_j(\xi, \eta, \zeta)_k)_p \nu_k w_k \quad (16)$$

gdje je  $w_k$  faktor utjecaja integracijske točke  $k$  jednodimenzijskog elementa, a NGAUS ukupni broj interpolacijskih točaka.

### 2.2.4 Sile koje uzrokuje natega

Polje pomaka prijanjajućih natega podudara se s odgovarajućim pomacima konstrukcije. Pri tome, elementi na-

tege imaju samo uzdužnu deformaciju. Uzdužna deformacija dana je u inkrementalnom obliku kao

$$\Delta \varepsilon_p = \mathbf{B}_p \Delta \mathbf{d} \quad (17)$$

gdje je  $\mathbf{B}_p$  uzeto iz izraza (11), a  $\Delta \mathbf{d}$  je prirast čvornih pomaka konstrukcije.

S pomoću usvojene ovisnosti  $\sigma - \varepsilon$  za prednapeti čelik, iz prirasta deformacije  $\Delta \varepsilon_p$  dobije se prirast napreznja

$$\Delta \sigma_p. \text{ Trenutačno napreznje u općoj točki dano je kao:}$$

$$\sigma_p = \sigma_p^0 + \Delta \sigma_p \quad (18)$$

gdje je  $\sigma_p^0$  početno napreznje u natezi.

Doprinos elementa prednapetog čelika na ekvivalentne čvorne sile konstrukcije definiran je na standardni način s pomoću

$$\mathbf{p}_p = A_p \int_{l_p} \mathbf{B}_p^T \sigma_p dl \quad (19)$$

ili numeričkom integracijom

$$(\mathbf{p}_i)_p = A_p \sum_{k=1}^{\text{NGAUS}} (\mathbf{B}_{i,k})_p^T \sigma_{p,k} v_k w_k \quad (20)$$

U gornjem je izrazu  $(\mathbf{p}_i)_p$  vektor doprinosa natege ekvivalentnim čvornim opterećenjima u  $i$ -tom čvoru elementa ljske u koji je ugrađena natega, a  $k$  se odnosi na integracijske točke jednodimenzijanskog elementa natege.

Za slučaj geometrijske nelinearnosti, izraz (19) može se napisati kao

$$\mathbf{p}_p = A_p \int_{l_p} (\mathbf{B}_{p,L} + \mathbf{B}_{p,NL})^T \sigma_p dl \quad (21)$$

ili

$$\mathbf{p}_p = A_p \int_{l_p} (\mathbf{G}_1 + \mathbf{d}^T \mathbf{G}^T \mathbf{G})^T \sigma_p dl \quad (22)$$

### 2.3 Formulacija slobodnih natega

#### 2.3.1 Općenito

Eksplisitna definicija matrice deformacija i matrice krutosti za slobodne natege znatno je složenija od prethodno izvedenih za prijanjajuće natege. Nadalje, upitno je može li se efikasnost numeričkog modela poboljšati ako se rabe matrice u standardnom obliku.

Sidrenje i efekti trenja slobodnih natega daju mali doprinos krutosti konstrukcije, pa je taj utjecaj mnogo manji nego kod prijanjajućih natega. S druge strane, točan proračun tangentne matrice krutosti kod inkrementalnih i

iterativnih postupaka nije presudan. Tako, primjerice, primjena aproksimativne matrice krutosti može biti znatno efikasnija kod takvih problema [15]. Razni autori uglavnom su se koristili dvjema metodama proračuna krutosti natege. U prvoj metodi doprinos slobodnih natega globalnoj krutosti konstrukcije je zanemaren. U drugoj metodi uzeta je krutost slična za prijanjajuće natege, kao što je prethodno opisano. Prednost odabira jedne od navedenih metoda ovisi o posebnosti analiziranog slučaja.

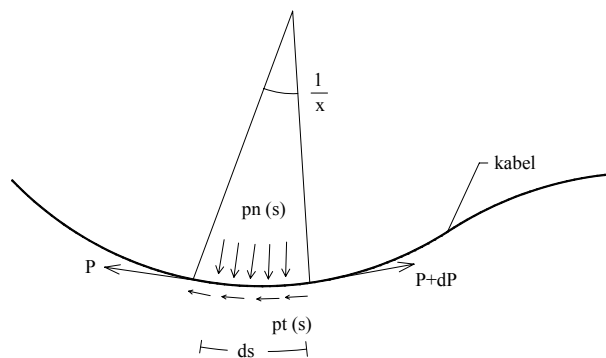
#### 2.3.2 Određivanje deformacija i napreznja

Kompatibilnost polja pomaka konstrukcije i polja pomaka natege osigurana je samo u području sidrenja. Prema tome, razlikuje se prirast deformacije natege  $\Delta \varepsilon_p$  i prirast deformacije betona  $\Delta \varepsilon_{c,p}$  koji okružuje nategu. Prirast deformacije  $\Delta \varepsilon_p$  u zadanoj točki natege proračuna se globalnim pristupom koji uzima u obzir zajedno sve elemente natege.

Jednadžba ravnoteže za kratki segment natege može se izraziti u diferencijalnom obliku (slika 3.) kao

$$\frac{dP}{ds} = \pm \mu \chi P(s) \quad (23)$$

gdje je  $\mu$  koeficijent trenja,  $\chi$  zakrivljenost segmenta natege, a  $P$  je sila u natezi.



Slika 3. Sile koje djeluju na kratkom segmentu natege

Predznak drugog člana ovisi o relativnim pomacima (klizanju) između natege i zaštitne cijevi. Prirast deformacije  $\Delta \varepsilon_p$  povezan je s prirastom sile prednapinjanja  $\Delta P$  s pomoću izraza:

$$\Delta P = A_p E_p \Delta \varepsilon_p \quad (24)$$

gdje je  $A_p$  ploština poprečnog presjeka natege, a  $E_p$  tangentni modul elastičnosti prednapetog čelika.

Iz izraza (23) i (24) slijedi diferencijalna jednadžba oblika

$$\frac{d(E_p \Delta \varepsilon_p)}{ds} = \pm \mu \chi (E_p \Delta \varepsilon_p) \quad (25)$$

s rješenjem

$$\Delta \varepsilon_p(s) = \frac{C}{E_p(s)} e^{\int_{s_A}^s \pm \mu \chi ds} = Cg(s) \quad (26)$$

gdje je  $C$  konstanta koja se proračuna s pomoću rubnih uvjeta (npr. osigurana je kompatibilnost pomaka konstrukcije i natege u području sidrenja),  $s_A$  je početak natege i  $s$  je presjek gdje se određuje prirast deformacija. Odnosno,  $C$  je veličina trenutnog prirasta deformacija, a  $g(s)$  je funkcija koja opisuje promjenu prirasta  $\Delta \varepsilon_p(s)$  uzduž osi natege (bazna funkcija).

Konstanta integracije  $C$  dobije se izjednačavajući promjenu duljine natege s odgovarajućom promjenom u okolnom betonu između početnog (A) i krajnjeg (B) položaja natege, tj.:

$$\int_{l_p} \Delta \varepsilon_p ds = \int_{l_p} \Delta \varepsilon_{c,p} ds \quad (27)$$

pa iz izraza (26) slijedi

$$C = \frac{\int_{l_p} \Delta \varepsilon_{c,p} ds}{\int_{l_p} g(s) ds} \quad (28)$$

Vrijednost prirasta deformacije  $\Delta \varepsilon_p$  kod slobodnih natega kabela dana je kao

$$\Delta \varepsilon_p(s) = \frac{\int_{l_p} \Delta \varepsilon_{c,p} ds}{\int_{l_p} g(s) ds} g(s) \quad (29)$$

Fizikalni smisao konstante  $C$  može se objasniti normaliziranom baznom funkcijom  $\bar{g}(s)$  u izrazu (26), opisanom kao

$$\bar{g}(s) = \frac{\int_{l_p} ds}{\int_{l_p} g(s) ds} g(s) \quad (30)$$

Nakon integracije (26) i s pomoću (27), dobiva se

$$C = \frac{\int_{l_p} \Delta \varepsilon_{c,p} ds}{\int_{l_p} ds} = \Delta \varepsilon_{p,m} \quad (31)$$

gdje je  $C$  prosječni prirast deformacije  $\Delta \varepsilon_{p,m}$  u natezi.

U izrazu za baznu funkciju

$$g(s) = \frac{1}{E_p(s)} e^{\int_{s_A}^s \pm \mu \chi ds} \quad (32)$$

predznak eksponenta ovisi o relativnom klizanju  $u_p(s)$  između natege i betona.

Definirajući

$$u_p(s) = \int_{s_A}^s \Delta \varepsilon_p(s) ds \quad (33)$$

i

$$u_{c,p}(s) = \int_{s_A}^s \Delta \varepsilon_{c,p}(s) ds \quad (34)$$

slijedi da je

$$u_r(s) = u_p(s) - u_{c,p}(s) \quad (35)$$

Ako je  $u_r(s) > 0$ , eksponent se uzima s pozitivnim predznakom, a u drugim slučajevima s negativnim predznakom.

Za određivanje točaka gdje relativno klizanje  $u_r(s)$  mijenja predznak, koje ovisi o prirastu deformacije natege, rabi se iterativni postupak proračunavanja. U ovom radu uzet je jednostavan postupak gdje se za prvu iteraciju uzima pozitivan predznak za rast vrijednosti  $\Delta \varepsilon_{c,p}$ , a negativan predznak za smanjenje vrijednosti  $\Delta \varepsilon_{c,p}$ .

Za proračunavanje veličina potrebnih za dobivanje  $\Delta \varepsilon_p$  usvojen je sljedeći numerički postupak. Počevši od sidra A natege i sukcesivno uzimajući Gaussove točke svih elemenata natege:

Iz (17) proračuna se  $\Delta \varepsilon_{c,p}$ , te se pronađe promjena

duljine odgovarajućeg segmenta:  $\sum_{k=1}^N (\Delta \varepsilon_{c,p})_k l_k$ .

Općenito, kod analize velikih pomaka jest:

$$\Delta \varepsilon_{c,p} = \left( \mathbf{G}_1 + \left( \mathbf{d} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{d} \right)^T \mathbf{G}^T \mathbf{G} \right) \Delta \mathbf{d} \quad (36)$$

i

$$\sum_{k=1}^N (\Delta \varepsilon_{c,p})_k v_k w_k (= \Delta l_p) \quad (37)$$

gdje je  $N$  = broj Gaussovih točaka  $\times$  broj elemenata natege

Proračuna se bazna funkcija  $g(s)$ :

$$g(s_k) = g_k = \frac{1}{(E_p)_k} \prod_{j=1}^k e^{\pm \mu \chi_j v_j w_j} \quad (38)$$

gdje se predznak od  $\mu$  uzima:

u prvoj iteraciji:

$$\begin{aligned} (\Delta \varepsilon_{c,p})_j^i - (\Delta \varepsilon_{c,p})_{j-1}^i &> 0 \quad \text{pozitivan predznak} \\ &< 0 \quad \text{negativan predznak} \end{aligned} \quad (39)$$

u ostalim iteracijama:

$$i > 1: (u_p)_j^{i-1} - (u_c)_j^{i-1} = 0 \rightarrow \mu = 0 \quad (40)$$

Nakon toga proračuna se odgovarajući integral:

$$\int_{l_p} g(s) ds = \sum_{k=1}^N \frac{v_k w_k}{(E_p)_k} \prod_{j=1}^k e^{\pm \mu \chi_j v_j w_j} \quad (\equiv \sum g_k v_k w_k) \quad (41)$$

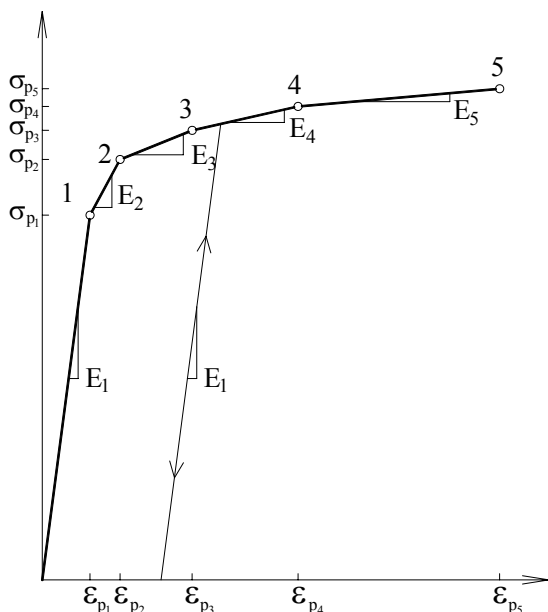
Na kraju, prirast deformacije za slobodnu nategu može se dobiti izrazom:

$$(\Delta \varepsilon_p)_k = g_k \frac{\Delta l_p}{\sum g_k v_k w_k} \quad (42)$$

Prirast napreznja u natezi  $\Delta \sigma_p$ , trenutano napreznje u natezi  $\sigma_p$ , te ekvivalentne čvrste sile kabala  $p_p$  proračunavaju se iz izraza (18) – (20) za prijanjajuće natege.

### 2.4 Model ponašanja prednapetog čelika

Bilinearni dijagrami koji se često primjenjuju za opis ovisnosti napreznje - deformacija čelika za armiranje ne mogu se primijeniti i za prednapeti čelik. Čelici veli-



Slika 4. Ovisnost napreznje-deformacija za prednapeti čelik

ke čvrstoće, koji služe za prednapinjanje, imaju drugačije ponašanje pri velikim deformacijama kada dolazi do progresivnog popuštanja. Kang [17], Van Greunen [18] i Roca [19] koristili su se multilinearim dijagramom za opis takvog ponašanja čelika (slika 4.). Isti je model usvojen i u ovome radu. Rasterećenje i ponovno opterećenje proračuna se s pomoću početnog modula elastičnosti prednapetog čelika  $E_1$ .

## 3 Modeliranje gubitaka sile prednapinjanja i prijenosa sile s natege na beton

### 3.1 Općenito

Razlikuju se trenutani i naknadni gubici sile prednapinjanja. Numerički postupci usvojeni za simuliranje trenutanih gubitaka sile prednapinjanja, koji se javljaju tijekom i neposredno nakon prednapinjanja, opisani su u nastavku [20]. Navedeni postupci mogu se primijeniti za prethodno i naknadno napete natege. Trenutani gubici sile prednapinjanja jesu: gubici uzrokovani trenjem, prokliznućem klina sidra i trenutnom deformacijom betona.

Naknadni gubici sile prednapinjanja nastaju od relaksacije prednapetog čelika te skupljanja i puzanja betona. Gubici od skupljanja i puzanja uključeni su izravno u model simulacije za dugotrajna opterećenja [10, 12].

### 3.2 Gubici uzrokovani trenjem

Pri relativnim pomacima između natege i betona, kada je prisutno trenje između njih, dolazi do promjene sile prednapinjanja u natezi. Ova promjena opisana je s pomoću ravnoteže natege definirane izrazom (23). Napinjanjem natege na sidru A (slika 5.), sila u natezi  $P(s)$  na udaljenosti  $s$  od mjesta usidrenja uzeta je kao:

$$P(s) = \alpha(s) P'_A \quad (43)$$

gdje je:

$$\alpha(s) = e^{-\mu \int_{s_A}^s \chi ds} \quad (44)$$

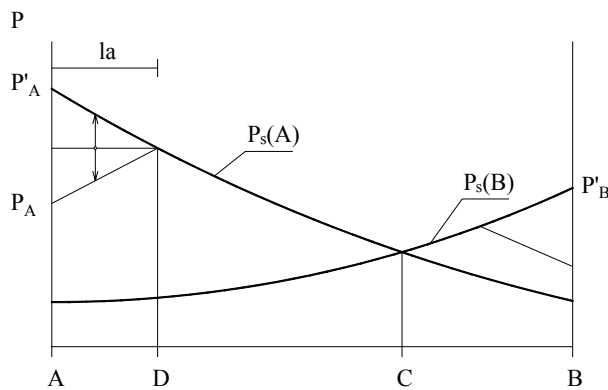
Zakrivljenost natege  $\chi$  može uključiti i slučajno kutno odstupanje  $k$ .

Ako se natega napinje na oba sidra A i B, relativni pomaci između betona i natege mijenjaju predznak u srednjoj točki C (slika 5.) kako slijedi:

$$P_A(s) = P'_A e^{-\mu \int_{s_A}^s \chi ds} \quad (45)$$

i

$$P_B(s) = P'_B e^{-\mu \int_s^{s_B} \chi ds} \quad (46)$$



Slika 5. Promjena sile prednapinjanja uzduž natege uzrokovana trenjem

Funkcija  $\alpha(s)$  definira gubitke sile prednapinjanja zbog trenja. Ona se uzima prema izrazima (45) ili (46), ovisno o tome koji od ova dva izraza daje veću vrijednost sile prednapinjanja. Dakle:

$$\alpha(s) = e^{-\mu \int_{s_A}^s \chi ds} \quad \text{za } s_A \leq s \leq s_C \quad (47a)$$

$$\alpha(s) = e^{-\mu \int_s^{s_B} \chi ds} \quad \text{za } s_C \leq s \leq s_B \quad (47b)$$

Vrijednost  $\alpha(s)$  proračunava se u čvorovima jednodimenzionjskog elementa natege kao čvorni parametar  $\alpha_j$ . Ostale vrijednosti odrede se s pomoću izoparametarskog koncepta.

### 3.3 Gubici zbog prokliznuća klina sidra

Pri prijenosu sile prednapinjanja s hidrauličke preše na sustav sidrenja dolazi do prokliznuća klina sidra i smanjenja deformacije natege zbog njegovog skraćivanja  $\Delta u$ . Veličina prokliznuća klina, tj. veličina skraćivanja natege  $\Delta u$ , ovisi o sustavu sidrenja. Općenito, zbog utjecaja trenja, efekt prokliznuća klina ograničen je samo na udaljenost  $l_a$  od sidra (slika 5.).

Segment natege na kojemu se razmatraju gubici, za zadano skraćivanje natege  $\Delta u$  pri prokliznuću klina i odgovarajuću duljinu utjecaja  $l_a$ , dobije se s pomoću

$$\Delta u = \int_0^{l_a} \Delta \epsilon_p(s) ds \quad (48)$$

ili s pomoću (24)

$$\Delta u = \frac{1}{E_p A_p} \int_0^{l_a} \Delta P(s) ds \quad (49)$$

gdje je  $\Delta P(s)$  promjena sile prednapinjanja zbog prokliznuća klina.

Prema slici 5. i ako se uzme  $s_A = 0$ , vrijedi:

$$P_D(s) = P'_A e^{-\mu \int_0^{l_a} \chi ds} \quad (50)$$

$$P_A(s) = P_D e^{-\mu \int_0^{l_a} \chi ds} \quad (51)$$

Slijedi da je

$$P_A(s) = P'_A e^{-2\mu \int_0^{l_a} \chi ds} \quad (52)$$

Skraćenje natege  $\Delta u$  na udaljenosti  $l_a$ , zbog prokliznuća klina, definirano je u izrazu (49), gdje je  $\Delta P(s)$  dobiveno kao razlika sile prednapinjanja proračunane iz  $P'_A$  i  $P_A$  (slika 5.), odnosno kao

$$\Delta u = \frac{P'_A}{E_p A_p} \int_0^{l_a} \left[ e^{-\mu \int_0^{l_a} \chi ds} - e^{-2\mu \int_0^{l_a} \chi ds} e^{\mu \int_0^{l_a} \chi ds} \right] ds \quad (53)$$

Nepoznanica  $l_a$  odredi se iterativnim postupkom, a integrale se proračuna numeričkom integracijom.

Sila  $P_A$  pri prednapinjanju samo s jedne strane opisana je u izrazu (52). U izrazu (44) ili (47) za funkciju  $\alpha(s)$ , kojom se određuje sila u natezi zbog gubitaka uzrokovanih trenjem, moraju se uračunati i gubici zbog prokliznuća klina na udaljenosti  $l_a$ . Prema tome jest:

$$\alpha(s) = e^{-2\mu \int_0^{l_a} \chi ds} e^{\mu \int_0^{l_a} \chi ds}, \quad s_A \leq s \leq s_D \quad (54)$$

Ako je duljina  $l_a$  u izrazu (53) jednaka ili veća od duljine natege, izraz (54) treba proširiti na udaljenost od sidra A do sidra B.

### 3.4 Gubici uzrokovani trenutačnom deformacijom betona

Gubici sile u natezi kod naknadno prednapetih natega uzrokovani deformacijom betona uzimaju se u proračun automatski s pomoću numeričkog modela za opis prijenosa sile prednapinjanja, upotrijebljenoga u postupku opisanom u točki 4.2.

### 3.5 Gubici zbog relaksacije prednapetog čelika

Magura je razvio matematičke izraze za uključivanje gubitaka zbog relaksacije prednapetog čelika, kojima su se kasnije koristili Roca [21-23] i Kang [17], a koji su i ovdje uzeti. Model se koristi sljedećom formulom:



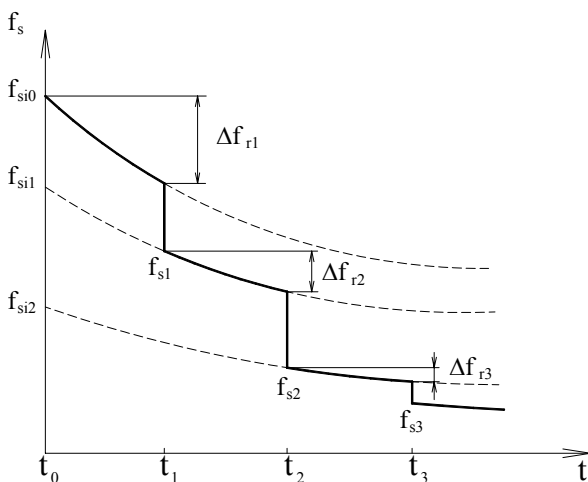
$$\frac{\sigma_p}{\sigma_{pi}} = 1 - \frac{\log_{10} t}{10} \left[ \frac{\sigma_p}{\sigma_{pi}} - 0,55 \right] \quad \text{za} \quad \frac{\sigma_p}{\sigma_{pi}} \geq 0,55 \quad (55)$$

gdje je  $\sigma_p$  prognozirano konačno naprezanje za početno naprezanje  $\sigma_{pi}$  nakon  $t$  dana. Ova se formula rabi samo za čelik izložen konstantnim deformacijama. Za ostale slučajeve, kao npr. za progresivne i višestruke slučajeve opterećivanja, potreban je složeniji model. Slika 6. prikazuje jedan model koji je razvio Magura, a koji je uporabljen i u ovome radu. Neka je  $f_{pi0}$  početno naprezanje. Nakon nekog vremena  $t_1$ , naprezanje će pasti na  $f_{R1}$  zbog relaksacije čelika. Za modificirano naprezanje  $f_{p1}$  od vanjskog trenutnog opterećenja u vremenu  $t_1$ , dobije se fiktivno početno naprezanje  $f_{pi1}$  pridruženo krivulji koja sadrži točku  $(t_1, f_{pi1})$ . Ta se krivulja rabi kao model za daljnju relaksaciju. Isti se postupak ponavlja za svaki inkrement opterećenja. Ukupna relaksacija čelika do vremena  $t_n$  dobiva se kao zbroj svih pojedinačnih smanjenja naprezanja od relaksacije  $(f_{Rk}, 1, 2, \dots, n)$ .

Gubici zbog relaksacije čelika moraju se uključiti s pomoću rezidualnih sila za predmetni segment kabela

$$\Delta R_{rlx}^u = - \int_V \mathbf{B}_p \Delta \sigma_p^* ds \quad (56)$$

koje simuliraju smanjenje prednapinjanja na betonsku konstrukciju. Pri tome se  $\Delta \sigma_p^*$  odnosi na promjenu naprezanja zbog relaksacije čelika u promatranom vremenskom inkrementu.



Slika 6. Proračunavanje gubitaka početnog naprezanja natege kod višekratnog opterećivanja zbog relaksacije prednapetog čelika

### 3.6 Gubici zbog puzanja i skupljanja betona

Gubici zbog puzanja i skupljanja betona uzimaju se u obzir automatski konstitutivnom jednačbom koja se rabi za opis vremenski ovisne analize [10, 12].

## 4 Numerički postupak rješenja

### 4.1 Općenito

Detaljan prikaz općeg postupka rješenja problema numeričkog modeliranja betonskih ljsaka pod dugotrajnim opterećenjem može se naći u [12]. U nastavku je prikazana samo dopuna ovog modela koja sadržava rješenje za prednapinjanje.

### 4.2 Rješenje za prednapinjanje

Kao što je opisano u točki 2., kod modeliranja prijenosa sile napinjanja natege na beton razlikuju se prethodno napete i naknadno napete konstrukcije. Za proračun prijenosa sile napinjanja natege na beton primjenjuje se numerički postupak razvijen za rješavanje problema s kratkotrajnim i dugotrajnim opterećenjem. Sila prednapinjanja unosi se u sustav s pomoću ekvivalentnih čvornih sila. Istodobno se uzimaju u obzir trenutačni gubici sile prednapinjanja. U trenutku prednapinjanja na konstrukciju obično djeluje samo vlastita težina, ali je moguće da djeluje i neko drugo opterećenje. Rubni uvjeti za slučaj prednapinjanja obično su drugačiji od onih za uporabno stanje. Dakle, nakon uspostavljanja ravnoteže za prednapinjanje, sustav se rješava za druga vanjska opterećenja, pri čemu se dugotrajni (vremenski) gubici sile prednapinjanja izravno uzimaju u obzir.

Osnovni koraci iterativnog postupka jesu:

(i) Prednapinjanje se modelira unošenjem početne deformacije  $\epsilon_{p0}$  u natezi, koja odgovara sili napinjanja natege. Uzimajući gubitke uzrokovane trenjem,  $\epsilon_{p0}$  proračuna se s pomoću sile prednapinjanja  $P_0$  prije gubitaka

$$\epsilon_{p0,j} = \frac{P_{0,j}}{E_p A_p} \quad (57a)$$

a

$$P_{0,j} = \alpha_j P_0' \quad (57b)$$

gdje je  $\alpha_j$  koeficijent gubitaka u čvorovima zbog trenja, a  $P_0'$  maksimalna sila prednapinjanja prije prijenosa sile na beton.

Ekvivalentna opterećenja u čvorovima od prednapete natege opisana su izrazom (19) kao:

$$\sigma_{p0}(\tau) = E_p \sum_{j=1}^3 N'_j(\tau) \varepsilon_{p0,j} \quad (58)$$

Dobivena ekvivalentna opterećenja dodaju se postojećim čvornim silama.

(ii) Za proračunano polje pomaka konstrukcije  $\Delta \mathbf{d}$ , u promatranima točkama natege proračuna se mehanička deformacija  $\varepsilon_p(\tau)$  i naprezanje  $\sigma_p(\tau)$ .

(iii) Ekvivalentna sila prednapinjanja  $\bar{P}'_0$ , koja djeluje na prvi "čvor" natege (sidro), dobivena je s pomoću integrala na udaljenosti  $l_{p,l}$  prvog elementa natege

$$\bar{P}'_0 = \int_{l_{p,l}} B'_{p,1} \sigma_p(\tau) A_p dl \quad (59)$$

gdje  $B'_{p,1}$  opisuje jednodimenzijsku matricu deformacija, koja povezuje uzdužnu deformaciju natege  $\varepsilon_p$  s tangentnim pomakom  $u'_1$  u prvom čvoru (slika 2.).

Nadalje,  $B'_{p,1}$  proračuna se iz izraza koji povezuje uzdužnu deformaciju natege  $\varepsilon_p$  s čvornim pomacima  $u_{p,j}$  jednodimenzijskog elementa u globalnom koordinatnom sustavu (slika 2.):

$$\varepsilon_p = \frac{du'}{ds} = [a \quad b \quad c] \sum_{j=1}^3 \frac{dN'_j}{ds} \begin{bmatrix} u_{p,j} \\ v_{p,j} \\ w_{p,j} \end{bmatrix} \quad (60)$$

Ekvivalentne čvorne sile za prvi čvor mogu se izraziti kao:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} = \int_{l_{p,1}} [a \quad b \quad c]^T \frac{dN'_1}{ds} \sigma_p A_p dl \quad (61)$$

gdje je

$$\frac{dN'_1}{ds} = \frac{dN'_1}{d\tau} \frac{d\tau}{ds} = \frac{dN'_1}{d\tau} \frac{1}{v} \quad (62)$$

a

$$\bar{P}'_0 = [a_1 \quad b_1 \quad c_1] \begin{bmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \quad (63)$$

gdje submatrica  $[a_1 \quad b_1 \quad c_1]$  sadrži komponente jediničnog vektora  $\mathbf{a}$  koji je tangenta na os natege u čvoru 1 u globalnom koordinatnom sustavu.

Ekvivalentna sila prednapinjanja u čvoru 1 jest:

$$\bar{P}'_0 = \int_{l_{p,1}} (a_1 a + b_1 b + c_1 c) \frac{dN'_1}{d\tau} \frac{1}{v} \sigma_p A_p dl \quad (64)$$

Iz izraza (64) slijedi da je:

$$B'_{p,1} = (a_1 a + b_1 b + c_1 c) \frac{dN'_1}{d\tau} \frac{1}{v} \quad (65)$$

(iv) Konvergencija, tj. jednakost početne  $P'_0$  i proračunane sile prednapinjanja  $\bar{P}'_0$  provjerava se s pomoću uvjeta

$$\frac{P'_0 - \bar{P}'_0}{P'_0} \leq TOLER \quad (66)$$

gdje je *TOLER* usvojena tolerancija.

Ako uvjet (66) nije zadovoljen, početna deformacija natege uveća se prirastom

$$\Delta \varepsilon_{p0,j} = \varepsilon_{p0,j} \left( \frac{P'_0}{\bar{P}'_0} - 1 \right) \quad (67)$$

Koraci od (i) do (iv) ponavljaju se dok se ne zadovolji uvjet konvergencije (66) i uvjet konvergencije koji se odnosi na nelinearno rješavanje cijelog sustava [12].

(v) Nakon postignute konvergencije, uzimaju se u obzir gubici uzrokovani relaksacijom čelika (56) s pomoću promjene naprezanja na duljini kabela  $l_a$ :

$$\Delta \sigma_p(\tau) = \sum_{j=1}^3 N'_j(\tau) \Delta \alpha_j \sigma_p(\tau) \quad (68)$$

gdje je

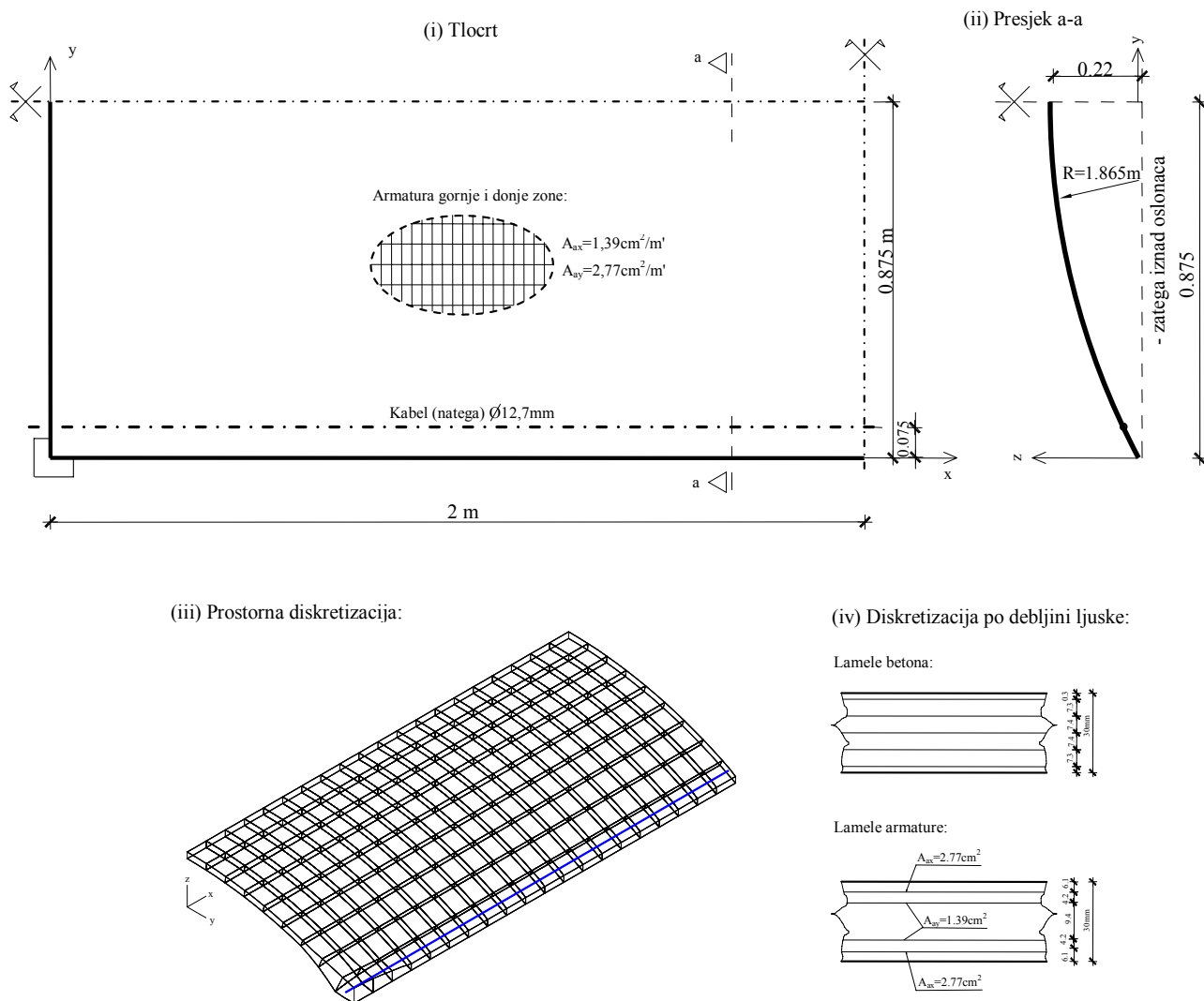
$$\Delta \alpha_j = \Delta \alpha(s_j) = e^{-\mu \int_{s_A}^{s_j} \chi ds} - e^{-2\mu \int_0^{l_a} \chi ds} e^{\mu \int_{s_A}^{s_j} \chi ds} \quad (69)$$

Za rješenje nelinearnog problema rabi se iterativna metoda Newton-Raphson.

### 5 Primjer

Izloženi numerički model provjeren je na rezultatima eksperimentalnog ispitivanja prednapete betonske ljsuske pod kratkotrajnim i dugotrajnim opterećenjem [4-6] do rasterećenja. U nastavku su dani samo podaci vezani za usvojeni numerički model, te usporedba eksperimentalnih i numeričkih rezultata, a detalji eksperimenta mogu se naći u [4-6].

Modelirana je samo četvrtina ljsuske zbog simetrije problema. Geometrijski oblik ljsuske i njezina diskretizacija



Slika 7. Osnovni podaci analizirane četvrtine ljsuske

konačnim elementima prikazani su na slici 7. Ljuska je po visini simulirana sa 6 lamela betona različite debljine. Armatura je simulirana s četiri lamele različite ploštine. Opterećenje ljsuske zadano je s pomoću ekvivalentnoga jednolikog plošnog opterećenja. Natega je položena kroz sredinu konačnih elemenata uzduž slobodnog ruba ljsuske. Utjecaj trenja između natega i betona je zanemaren. Djelovanje krute horizontalne čelične zatega na kraju ljsuske modelira se s pomoću spriječenoga bočnog pomaka u smjeru osi y.

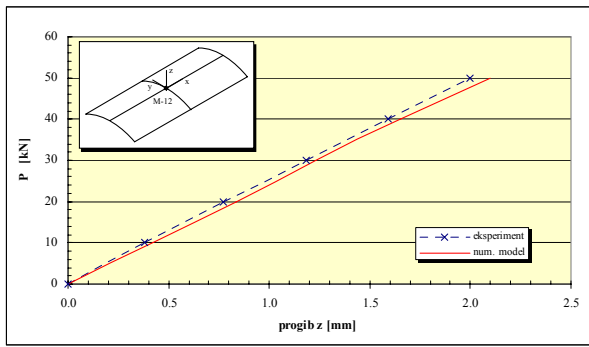
Numerička analiza ponašanja ljsuske podijeljena je u tri faze, kao i u eksperimentu: prednapinjanje, kratkotrajno opterećenje i dugotrajno opterećenje do rasterećenja. Veličina proračunskih inkremenata sile prednapinjanja i kratkotrajnog opterećenja identična je veličini inkremenata kod provedenog eksperimenta. Sila napinjanja od  $P = 50\text{ kN}$  unosi se u pet inkremenata, kao i kratkotraj-

no opterećenje (L). Od 1 do 15 dana vremenske analize uzeti su kraći vremenski koraci, a nakon toga su vremenski koraci povećavani prema kraju vremenske analize.

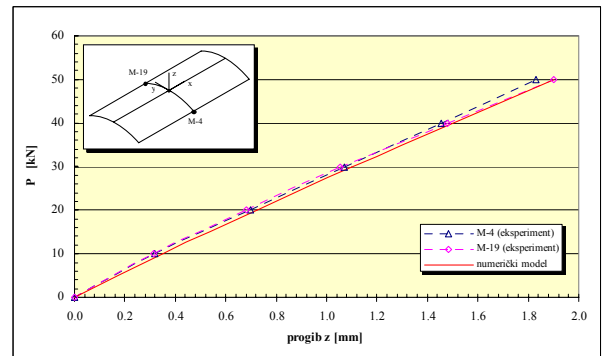
Treba napomenuti da utjecaj skupljanja betona ovdje nije točno simuliran jer je razmatrana vremenska domena započeta tek nakon  $t = 90$  dana. Naime, u tom je trenutku uklonjena oplata, izvedeno napinjanje natega i nanošenje vanjskog opterećenja.

Na slikama 8. do 11. prikazana je usporedba numeričkih rezultata i izmjerenih eksperimentalnih vrijednosti. Uspoređeni su rezultati za svaki inkrement prednapinjanja i opterećenja, te za ukupno vanjsko opterećenje nakon 3, 14, 28, 90, 180 i 365 dana od prednapinjanja.

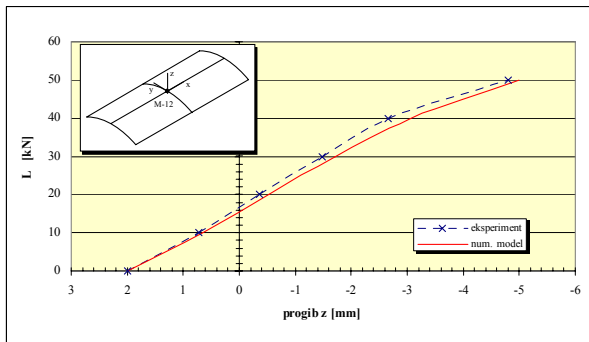
Kao što se vidi iz priloženih slika, dobiveni numerički rezultati dobro se slažu s eksperimentalno utvrđenim vrijednostima pojedine faze opterećenja.



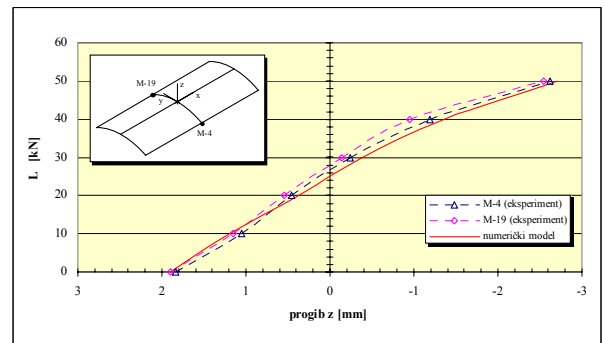
a) Prednapinjanje



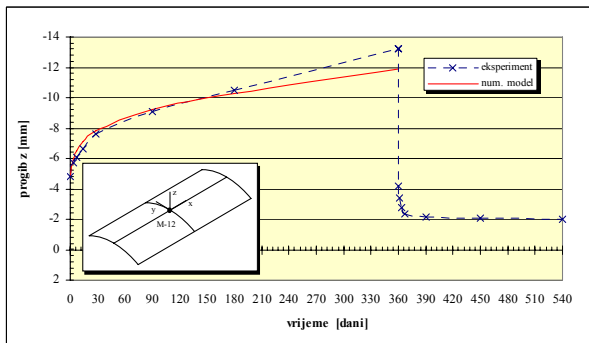
a) Prednapinjanje



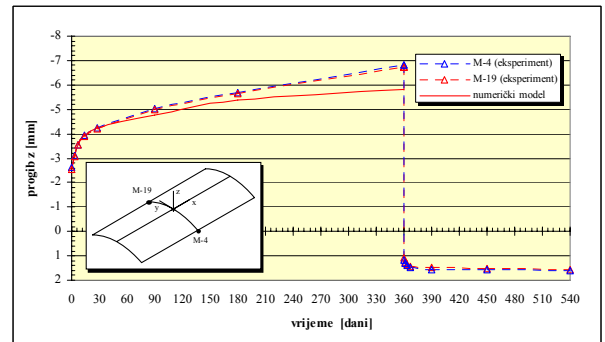
b) Kratkotrajno opterećenje



b) Kratkotrajno opterećenje



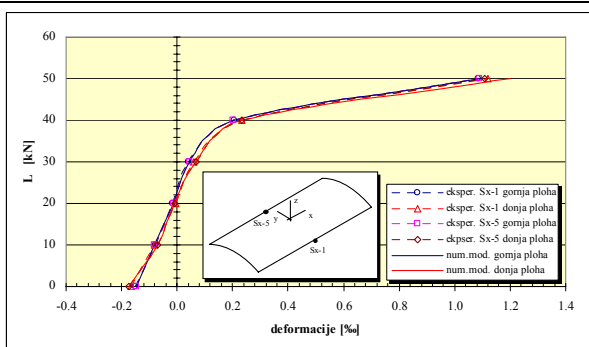
c) Dugotrajno opterećenje, do rasterećenja



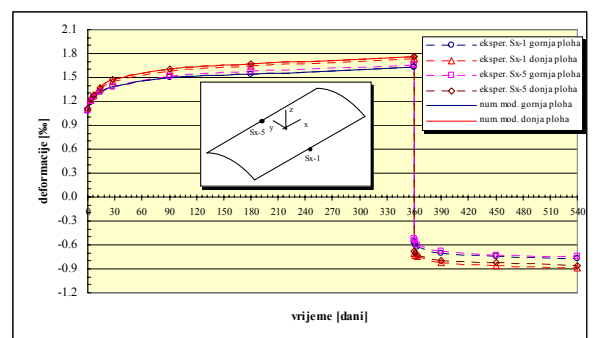
c) Dugotrajno opterećenje, do rasterećenja

Slika 8. Pomaci ljsuke u mjernoj točki M-12(sredina ljsuke)

Slika 9. Pomaci ljsuke u mjernim točkama M-4 i M-19

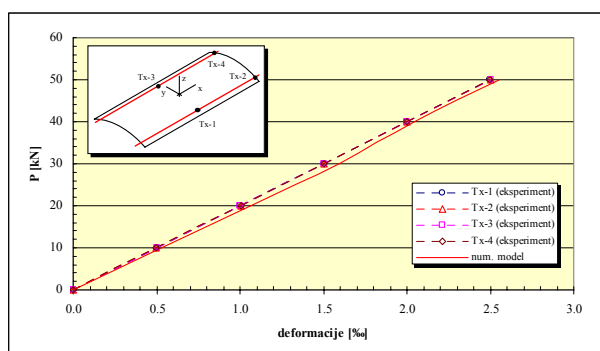


a) Kratkotrajno opterećenje (nakon prednapinjanja) - x smjer

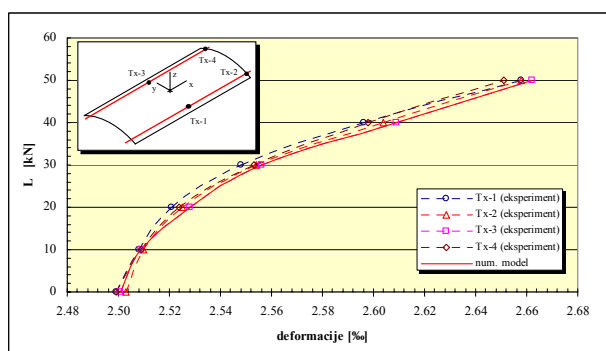


b) Dugotrajno opterećenje (do rasterećenja) - x smjer

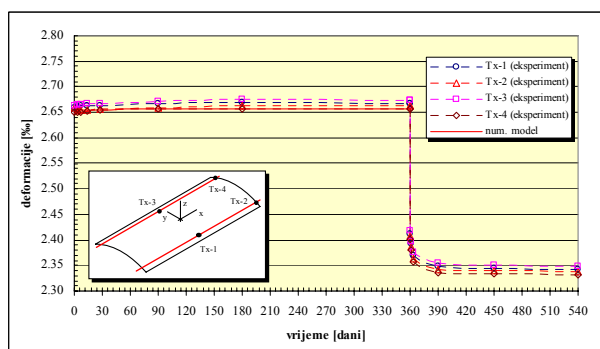
Slika 10. Deformacije armature gornje i donje zone izmjerene tenzometrima oznake S1 i S5



a) Prednapinjanje



b) Kratkotrajno opterećenje



c) Dugotrajno opterećenje, do rasterećenja

Slika 11. Deformacije natege (mjerna mjesta Tx-1, Tx-2, Tx-3 i Tx-4)

## 6 Zaključak

Provjera izloženoga numeričkog modela na rezultatima provedenoga eksperimentalnog preispitivanja prednapete betonske ljsuske [4-6] pokazuje dobro slaganje eksperimentalnih i numeričkih vrijednosti za kratkotrajna i dugotrajna opterećenja. Potrebna su daljnja preispitivanja numeričkog modela na više laboratorijskih ispitivanja. Očekuje se da izloženi numerički model nađe praktičnu primjenu u analizi prednapetih betonskih ploča i ljsusaka opterećenih kratkotrajnim i dugotrajnim opterećenjem bez rasterećenja.

## LITERATURA

- [1] Radnić, J.; Matešan, D.: *Experimental testing of RC slab behavior under long-term load*, International Conference on Advanced Computational Engineering and Experimenting, Abstract book ACE-X 2007, Algarve, 2007.
- [2] Radnić, J.; Matešan, D.: *Experimental testing of RC slab behavior under long-term load*, Materialwissenschaft und Werkstofftechnik (2008) 39, 157-161.
- [3] Radnić, J.; Matešan, D.: *Ispitivanje armiranobetonske ploče pod dugotrajnim opterećenjem i rasterećenjem*, Građevinar (2007) 59, 967-973.
- [4] Radnić, J.; Matešan, D.: *Experimental Testing of Prestressed Concrete Shell under Long-Term Loading and Unloading*, 2nd International Conference on Advanced Computational Engineering and Experimenting, Abstract book ACE-X 2008, Barcelona, 2008.
- [5] Radnić, J.; Matešan, D.: *Experimental Testing of Prestressed Concrete Shell under Long-Term Loading and Unloading*, Experimental Mechanics (2009) DOI: 10.1007/s11340-009-9242-9.
- [6] Radnić, J.; Matešan, D.: *Ispitivanje armiranobetonske ljsuske pod dugotrajnim opterećenjem i rasterećenjem*, Građevinar (2009) 61, 711-720.
- [7] Radnić, J.; Harapin, A.; Matešan, D.: *Statička i dinamička analiza betonskih ljsusaka - element ljsuske i modeli*, Građevinar (2001) 53, 695-709.
- [8] Radnić, J.; Harapin, A.; Matešan, D.: *Numerički postupak pri statičkoj i dinamičkoj analizi betonskih ljsusaka*, Građevinar (2001) 53, 759-771.
- [9] Radnić, J.; Matešan, D.: *Modelling of Concrete Shells Exposed to Long-term Static Loading*, Advanced Numerical Analysis of Shell-like Structures, Croatian Society of Mechanics, Zagreb, 2007.
- [10] Radnić, J.; Matešan, D.: *Computation model for time-dependent analysis of concrete-shells*, Computational Plasticity VII Fundamentals and Application, CIMNE, Barcelona (2003) 178-178.
- [11] Radnić, J.; Matešan, D.; Harapin, A.: *Model geometrijske nelinearnosti u statičkoj analizi ljsusaka*, Građevinar (2003) 55, 583-589.
- [12] Radnić, J.; Matešan, D.: *Proračun betonskih ljsusaka s uključenjem reoloških svojstava betona*, Građevinar (2003) 55, 001-013.
- [13] Oh, B.H.; Jeon, S.J.: *Advanced automatic generation scheme of prestressing tendons for efficient FE analysis of PSC shell structures*, Finite Elements in Analysis and Design (2004) 40, 913-931.
- [14] Hofstetter, G.; Mang, H.A.: *Computational mechanics of reinforced concrete structures*, Vienna, 1995.
- [15] Figueiras, J.A.: *Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells*, Ph.D. Thesis, University College of Swansea, C/Ph/72/83, 1983.
- [16] Figueiras, J.A.; Povoas, R.H.C.F.: *Modelling of prestress in non-linear analysis of concrete structures*, Computers & Structures, (1994) 53, 173-187.
- [17] Kang, Y.J.; Scordelis, A.C.: *Nonlinear analysis of prestressed concrete frames*, ASCE Journal of the Structural Division (1980) 106, 445-462.

- [18] Greunen, Van J.; Scordelis, A.C.: *Nonlinear analysis of prestressed concrete slabs*, ASCE Journal of Structural Engineering (1983) 109, 1742 - 1760.
- [19] Roca, P.; Mari, A.R.: *Numerical treatment of prestressing tendons in the nonlinear analysis of prestressed concrete structures*, Journal of Computers and Structures (1993) 46, 905-916.
- [20] Zia, P.; Preston, H.K.; Scott, N.L.; Workman, E.B.: *Estimating prestress losses*, Concrete International: Design and Construction, ACI (1979) 1, 32-38.
- [21] Roca, P.; Mari, A.R.: *Nonlinear geometric and material analysis of prestressed concrete general shell structures*, Journal of Computers and Structures (1993) 46, 917-929.
- [22] Roca, P.; Mari, A.R.: *Numerical treatment of prestressing tendons in the nonlinear analysis of prestressed concrete structures*, Journal of Computers and Structures (1993) 46, 905-916.
- [23] Roca, P.; Mari, A.R.; Scordelis, A.C.: *Nonlinear analysis of reinforced and prestressed concrete axisymmetric shells*, Bulletin of IASS (1989) 1, 1-12.
-