

Statička i dinamička analiza betonskih ljusaka

Jure Radnić, Alen Harapin, Domagoj Matešan

Ključne riječi

armiranobetonska ljuska,
numerički postupak,
računalni program DALJ,
parabolična cilindrična
ljuska, toranj za hlađenje

Key words

reinforced concrete shell,
numerical procedure,
computer program DALJ,
parabolic cylindrical
shell, refrigeration tower

Mots clés

coque en béton armé,
procédé numérique,
logiciel DALJ, coque
parabolique cylindrique,
tour de refroidissement

Ключевые слова:

железобетонная
оболочка, числовой
способ,
расчётная программа
DALJ (ДАЛБ),
параболическая
цилиндрическая
оболочка, градирня

Schlüsselworte:

Stahlbetonschale,
numerisches Verfahren,
Komputerprogramm
DALJ, parabolische
zylindrische Schale,
Kühlturm

J. Radnić, A. Harapin, D. Matešan

Izvorni znanstveni rad

Numerički postupak pri statičkoj i dinamičkoj analizi betonskih ljusaka

Rad je nastavak i čini cjelinu s radom [44] u kojem su opisani elementi ljuske za analizu i modeli za numerički postupak. Detaljnije je prikazan praktični postupak za provedbu proračuna. Opisan je posebno izrađeni proračunski program DALJ namijenjen nelinearnoj analizi armiranobetonskih ploča i ljusaka. Prikazan je način proračuna na dvama primjerima – na paraboličnoj cilindričnoj ljuski promjenjive debljine i na armiranobetonskim tornjevima za hlađenje u nuklearnim elektranama.

J. Radnić, A. Harapin, D. Matešan

Original scientific paper

Numerical procedure in the static and dynamic analysis of concrete shells

The paper is a continuation of, and forms a whole with, the paper [44] in which shell elements for analysis and models for numerical procedure, are described. A practical procedure for calculation is presented in more detail. A special computer program DALJ for nonlinear analysis of reinforced-concrete palets and shells is also described. The calculation method is illustrated with two examples – using a parabolic cylindrical shell of variable thickness and reinforced-concrete refrigeration towers in nuclear power plants.

J. Radnić, A. Harapin, D. Matešan

Ouvrage scientifique original

Procédé numérique dans l'analyse statique et dynamique des coques en béton

Cet article fait suite à l'article [44], dont il fait partie intégrante et qui décrit les éléments de la coque pour l'analyse et les modèles pour le procédé numérique. On présente plus en détail le procédé pratique du calcul. On décrit le logiciel de calcul spécifique DALJ, destiné à l'analyse non-linéaire des dalles en béton armé et des coques. On présente la méthode de calcul sur deux exemples : une coque parabolique cylindrique d'épaisseur variable et des tours en béton armé de refroidissement des centrales nucléaires.

Ю. Раднич, А. Харанин, Д. Матешан

Оригинальную научную работа

Числовой способ при статическом и динамическом анализах бетонных оболочек

Работа является продолжением и составляет одно целое с работой [44], в которой описаны элементы оболочки для анализа и модели для числового способа. Детальнее показан практический способ проведения расчёта. Описана специально выработанная расчётная программа DALJ (ДАЛБ), предназначенная нелинейному анализу железобетонных плит и оболочек. Показан способ расчёта на двух примерах - на параболической цилиндрической оболочке изменяемой толщины и на железобетонных градирнях на атомных электростанциях.

J. Radnić, A. Harapin, D. Matešan

Wissenschaftlicher Originalbeitrag

Numerisches Verfahren bei der statischen und dynamischen Analyse von Betonschalen

Dieser Artikel ist die Fortsetzung des Artikles (44) und bildet mit ihm zusammen ein Ganzes, in dem die Schalenelemente für das numerische Verfahren beschrieben sind. Das praktische Verfahren für die Durchführung der Berechnung ist detailliert dargestellt. Beschrieben ist das besonders ausgearbeitete Computerprogramm DALJ das für die nichtlineare Analyse von Stahlbetonplatten und -schalen bestimmt ist. Die Berechnungsweise ist an zwei Beispielen dargestellt – an der parabolischen zylindrischen Schale mit veränderlicher Dicke und an Stahlbetonkühltürmen in Kernkraftwerken.

Autori: Prof. dr. sc. **Jure Radnić**, dipl. ing. građ.; doc. dr. sc. **Alen Harapin**, dipl. ing. građ., Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu; mr. sc. **Domagoj Matešan**, dipl. ing. građ., Institut građevinarstva Hrvatske, PC Split

1 Provedba numeričke analize

1.1 Jednadžba dinamičke ravnoteže

Primjenom principa virtualnog rada, jednadžba dinamičke ravnoteže konstrukcije može se napisati u sljedećem obliku:

$$\int_{\Omega} (\delta \varepsilon)^T s d\Omega - \int_{\Omega} (\delta \mathbf{d})^T (\mathbf{b} - \rho_s \dot{\mathbf{d}} - \mu' \ddot{\mathbf{d}}) d\Omega - \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{d})^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (1)$$

U tom je izrazu $\delta \mathbf{d}$ vektor virtualnih pomaka, $\dot{\mathbf{d}}$ vektor brzina, a $\ddot{\mathbf{d}}$ vektor ubrzanja; $\delta \varepsilon$ je vektor pridruženih virtualnih deformacija; \mathbf{b} je vektor volumnih, a \mathbf{t} vektor površinskih sila; σ je vektor naprezanja (u lokalnom sustavu); ρ_s je gustoća, μ' je parametar prigušenja, Ω je područje konstrukcije, a Γ_t područje konstrukcije izloženo djelovanju površinskih sila. Izraz (1) općenito vrijedi za slučaj materijalne i geometrijske nelinearnosti.

U slučaju kada se vremenski utjecaji mogu zanemariti, izraz (1) svodi se na:

$$\int_{\Omega} (\delta \varepsilon)^T s d\Omega - \int_{\Gamma_t} (\delta \mathbf{d})^T \mathbf{t} d\Gamma = 0 \quad (2)$$

što je jednadžba statičke ravnoteže.

Prostornom diskretizacijom konstrukcije te primjenom MKE, jednadžba dinamičke ravnoteže (1) s nepoznatim čvornim pomacima \mathbf{d} može se napisati u poznatom obliku

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{d}} + \mathbf{R}(\mathbf{d}) = \mathbf{f} \quad (3)$$

pri čemu je:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{ij} &= \int_{\Omega_s} \mathbf{N}_i^T \rho \mathbf{N}_j d\Omega \\ \mathbf{C}_{ij} &= \int_{\Omega_s} \mathbf{N}_i^T \mu' \mathbf{N}_j d\Omega \\ \mathbf{R}_i(\mathbf{d}) &= \int_{\Omega_s} \mathbf{B}_i^T s_i d\Omega \\ \mathbf{f}_i &= \int_{\Omega_s} \mathbf{N}_i^T \mathbf{b}_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} \mathbf{N}_i^T \mathbf{t}_i d\Gamma \end{aligned} \quad (4)$$

U prethodnoj je jednadžbi, \mathbf{M} matrica masa konstrukcije, \mathbf{C} matrica prigušenja konstrukcije, $\mathbf{R}(\mathbf{d})$ vektor unutarnjih otpornih sila, a \mathbf{f} vektor vanjskih čvornih sila. \mathbf{N}_i su bazne funkcije pomaka, a \mathbf{B} matrica veze naprezanja i deformacija.

Vektor unutrašnjih sila $\mathbf{R}(\mathbf{d})$ može se napisati i u obliku

$$\mathbf{R}(\mathbf{d}) = \mathbf{K} \mathbf{d}; \quad \mathbf{K} = \partial \mathbf{R} / \partial \mathbf{d} \quad (5)$$

gdje je \mathbf{K} matrica krutosti konstrukcije.

Za realne konstrukcije veza deformacija-pomak općenito je nelinearna, tj.

$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{d}; \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{d}) \quad (6)$$

što je tzv. geometrijska nelinearnost. Naime, zbog promjene geometrije matrica \mathbf{B} nije linearna, već ovisi o pomacima sustava. Veza ε - \mathbf{d} poznata je i pod nazivom model geometrije.

Veza naprezanje-deformacija (σ - ε), kako je također općenito nelinearna i predstavlja tzv. materijalnu nelinearnost. Veza σ - ε se može napisati i u obliku

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon; \quad \mathbf{D} = \mathbf{D}(\mathbf{d}) \quad (7)$$

gdje je \mathbf{D} matrica veze naprezanje-deformacija. Veza σ - ε poznata je pod nazivom konstitutivni zakon ili model materijala.

Za statičke se probleme izraz (3) svodi na

$$\mathbf{R}(\mathbf{d}) = \mathbf{K} \mathbf{d} = \mathbf{f} \quad (8)$$

1.2 Vremenska integracija jednadžbi gibanja

Za vremensku integraciju jednadžbi gibanja (3) uporabljen je Newmarkov implicitni algoritam koji je u iterativnom obliku razvio Hughes [28, 26]. U $n+1$ vremenskom inkrementu jednadžba dinamičke ravnoteže (3) ima oblik

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}}_{n+1} + \mathbf{R}(\mathbf{d}_{n+1}, \dot{\mathbf{d}}_{n+1}) = \mathbf{f}_{n+1} \quad (9)$$

Primjena navedenog algoritma [28] daje:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1} &= \bar{\mathbf{d}}_{n+1} + \beta \Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_n \\ \dot{\mathbf{d}}_{n+1} &= \bar{\dot{\mathbf{d}}}_{n+1} + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n \end{aligned} \quad (10)$$

gdje je

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \dot{\mathbf{d}}_n + 0.5(1 - 2\beta)\Delta t^2 \ddot{\mathbf{d}}_n \\ \bar{\dot{\mathbf{d}}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{d}}_n + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{\mathbf{d}}_n \end{aligned} \quad (11)$$

U navedenim izrazima $\bar{\mathbf{d}}_{n+1}$ i $\bar{\dot{\mathbf{d}}}_{n+1}$ su pretpostavljene, a \mathbf{d}_{n+1} i $\dot{\mathbf{d}}_{n+1}$ korigirane vrijednosti čvornih pomaka, odnosno njihovih derivacija. Parametri β i γ određuju stabilnost i točnost metode. Bezuvjetna stabilnost postiže se za $\gamma \geq 0,5$ i $\beta = 0,25(\gamma + 0,5)^2$. Parametar γ odražava numeričko prigušenje u sustavu. Za $\gamma = 0,5$, nema prigušenja. Newmarkova familija metoda, kao poseban slučaj (za određene vrijednosti parametara β i γ), uključuje mnoge poznate metode [26]. Jedna od najefikasnijih je metoda srednjeg ubrzanja ($\beta = 0,25, \gamma = 0,5$) koja je primijenjena i u ovome radu.

Tablica 1. Newmarkov implicitni algoritam iterativnog rješenja problema

1.	Za vremenski korak $n + 1$, staviti iteracijski korak $i = 1$
2.	Izračunati vektore pretpostavljenih pomaka, brzina i ubrzanja na početku vremenskog koraka s pomoću poznatih vrijednosti iz prethodnog vremenskog koraka: $\mathbf{d}_{n+1}^1 = \bar{\mathbf{d}}_{n+1}$ $\mathbf{d}_{n+1}^{\xi} = \bar{\mathbf{d}}_{n+1}^{\xi}$ $\mathbf{d}_{n+1}^{\xi\xi} = (\mathbf{d}_{n+1}^1 - \bar{\mathbf{d}}_{n+1}) / (\beta\Delta t^2)$
3.	Izračunati efektivne rezidualne sile $(\mathbf{f}^*)^i$: $(\mathbf{f}^*)^i = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{M}\mathbf{d}_{n+1}^{\xi\xi} - \mathbf{R}(\mathbf{d}_{n+1}^i, \mathbf{d}_{n+1}^{\xi})$
4.	Izračunati matricu efektivne krutosti \mathbf{K}_{τ}^* (ako je potrebno): $\mathbf{K}_{\tau}^* = \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2} + \gamma \frac{\mathbf{C}_{\tau}}{\beta\Delta t} + \mathbf{K}_{\tau}$
5.	Izračunati vektor prirasta pomaka $\Delta \mathbf{d}^i$: $\mathbf{K}_{\tau}^* \Delta \mathbf{d}^i = (\mathbf{f}^*)^i$
6.	Korigirati pretpostavljene vrijednosti pomaka, brzina i ubrzanja: $\mathbf{d}_{n+1}^{i+1} = \mathbf{d}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^i$ $\mathbf{d}_{n+1}^{\xi i+1} = (\mathbf{d}_{n+1}^{i+1} - \bar{\mathbf{d}}_{n+1}) / (\beta\Delta t^2)$ $\mathbf{d}_{n+1}^{\xi\xi i+1} = \mathbf{d}_{n+1}^{\xi i} + \gamma \Delta t \mathbf{d}_{n+1}^{\xi i+1}$
7.	Kontrolirati konvergenciju postupka: – Ako $\Delta \mathbf{d}^i$ zadovoljava kriterij konvergencije: $\ \Delta \mathbf{d}^i\ / \ \mathbf{d}_{n+1}^{i+1}\ \leq \varepsilon_d$ prelazi se na sljedeći vremenski korak (zamijeni se n s $n + 1$ i ide na korak rješenja (1)). Rješenje u vremenu t_{n+1} je: $\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{d}_{n+1}^{i+1}$ $\mathbf{d}_{n+1}^{\xi} = \mathbf{d}_{n+1}^{\xi i+1}$ $\mathbf{d}_{n+1}^{\xi\xi} = \mathbf{d}_{n+1}^{\xi\xi i+1}$ – Ako kriterij konvergencije nije zadovoljen, iteracijski postupak s korekcijom pomaka, brzina i ubrzanja se nastavlja (zamijeni se i s $i+1$, te ide na korak rješenja (3)).

Uvrštenjem (10) u (9), jednadžba dinamičke ravnoteže u inkrementalno-iterativnom obliku svodi se na oblik

$$\mathbf{K}_{\tau}^* \Delta \mathbf{d}^i = (\mathbf{f}^*)^i \quad (12)$$

gdje su matrica efektivne “krutosti” \mathbf{K}_{τ}^* i vektor efektivnog opterećenja $(\mathbf{f}^*)^i$ dani sa

$$\mathbf{K}_{\tau}^* = \frac{\mathbf{M}}{\beta\Delta t^2} + \gamma \frac{\mathbf{C}_{\tau}}{\beta\Delta t} + \mathbf{K}_{\tau} \quad (13)$$

$$(\mathbf{f}^*)^i = \mathbf{f}_{n+1} - \mathbf{M}\mathbf{d}_{n+1}^{\xi\xi} - \mathbf{R}(\mathbf{d}_{n+1}^i, \mathbf{d}_{n+1}^{\xi}) \quad (14)$$

Rješenje jednadžbe (12) daje

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1}^{i+1} &= \mathbf{d}_{n+1}^i + \Delta \mathbf{d}_{n+1}^i \\ \mathbf{d}_{n+1}^{\xi i+1} &= (\mathbf{d}_{n+1}^{i+1} - \bar{\mathbf{d}}_{n+1}) / (\beta\Delta t^2) \\ \mathbf{d}_{n+1}^{\xi\xi i+1} &= \mathbf{d}_{n+1}^{\xi i} + \gamma \Delta t \mathbf{d}_{n+1}^{\xi i+1} \end{aligned} \quad (15)$$

Kriterij konvergencije iterativnog postupka dan je sa

$$\|\Delta \mathbf{d}^i\| / \|\mathbf{d}_{n+1}^{i+1}\| \leq \varepsilon_d \quad (16)$$

gdje je $\|\Delta \mathbf{d}^i\|$ norma prirasta pomaka u i -toj iteraciji, $\|\mathbf{d}_{n+1}^{i+1}\|$ je norma tekućeg pomaka a ε_d je dopustiva tolerancija.

Algoritam rješenja problema za svaki vremenski korak prikazan je u tablici 1.

1.3 Rješenje svojstvene zadaće

Rješenje svojstvene zadaće (određivanje svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora konstrukcije) važno je za određivanje duljine vremenskog inkrementa Δt kod vremenske integracije jednadžbi gibanja. U bezuvjetno stabilnom Newmarkovu implicitnom algoritmu, duljina vremenskog koraka Δt određuje točnost rješenja. U numeričkim analizama Δt se najčešće odabire oko 1/100 osnovnog perioda sustava. Stoga je, dakle, potrebno riješiti svojstvenu zadaću problema kako bi se odabrala optimalna duljina Δt . Dulji Δt ima za posljedicu kraće trajanje analize i redovito netočnije rezultate, dok kraći Δt ima za posljedicu dulje trajanje analize i redovito točnije rezultate.

Za rješenje svojstvene zadaće konstrukcije primijenjena je WYD metoda, a postupak rješenja detaljno je prikazan u [33, 43].

1.4 Matrica masa

Ako se matrica masa računa prema izrazu (4), naziva se konzistentna matrica masa. Naime, proračun matrice masa \mathbf{M} je konzistentan proračunu matrice krutosti \mathbf{K} (rabe se iste interpolacijske funkcije i matrice su jedna-

ke strukture). Dakle, takvim se pristupom ne dobiva dijagonalna matrica masa.

Uporabljeni su različiti postupci formiranja dijagonalne matrice masa. Dijagonalna matrica **M** može se primjerice dobiti tako da se zbroje svi članovi pojedinog retka konzistentne matrice masa (*row lumping*). Često se rabi i postupak *special lumping* pri kojem se članovi dijagonalne matrice masa elementa dobivaju tako da se ukupna masa elementa raspodijeli proporcionalno dijagonalnim članovima konzistentne matrice masa. Ovaj je pristup primijenjen i u ovome radu.

Za tipični čvor *i*, dijagonalni članovi m_{ii} dijagonalne matrice masa elementa pridružene pomacima *u*, *v* i *w*, izračunavaju se s pomoću

$$m_{ii} = \psi_i \int_{V_e} \rho dV_e \quad (17)$$

gdje je ψ_i težinski koeficijent, ρ gustoća materijala, a V_e volumen elementa ploče/ljuske. Dijagonalni članovi rotacijske tromosti (pridruženi zaokretima) $I_{ii\alpha}$ i $I_{ii\beta}$, vezani za vektore v_{1k}^0 i v_{2k}^0 , također su uzeti u obzir jer mogu imati utjecaja kod debelih ploča/ljosaka [24]. Rotacijske tromosti dane su sa

$$I_{ii\alpha} = I_{ii\beta} = \psi_i \int_{V_e} \rho \zeta^2 dV_e \quad (18)$$

Težinski koeficijent ψ_i iznosi

$$\psi_i = \frac{\int_{V_e} \rho \mathbf{N}_i \mathbf{N}_i dV_e}{\sum_{k=1}^n \int_{V_e} \rho \mathbf{N}_k \mathbf{N}_k dV_e} \quad (19)$$

gdje je *n* broj čvorova elementa. Za uslojeni element je

$$I_{ii\alpha} = I_{ii\beta} = \psi_i \int_{S_m} \rho_j \Delta \xi^i \left(\xi^{i^2} + \Delta \xi^{i^2} / 12 \right) dx' dy' \quad (20)$$

gdje je sumacija provedena preko svih lamela. Za element koji nije uslojen, rotacijska je tromost približno

$$I_{ii\alpha} = I_{ii\beta} = m_{ii} \frac{h_i^2}{4} \quad (21)$$

Izraz (21) može se tumačiti kao rezultanta dijagonalne matrice mase $m_{ii}/2$ koncentrirane na svakom kraju vektora v_i oko osi koja je na njega okomita. Dijagonalna matrica masa ljoske za čvor *i* jest oblika

$$M_i = \begin{bmatrix} m_{ii} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_{ii} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_{ii} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{ii\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{ii\alpha} \end{bmatrix} \quad (22)$$

1.5 Konstrukcijsko prigušenje

Prema (4), matrica prigušenja **C** definirana je na isti način i s istim interpolacijskim funkcijama kao i matrica masa **M**. Jedino se umjesto gustoće ρ u podintegralnom izrazu pojavljuje koeficijent prigušenja μ' . Kako je struktura ove matrice ista kao i struktura konzistentne matrice masa, ovako definirana matrica **C** naziva se konzistentnom matricom prigušenja.

Kako se u MKE ne može formirati matrica prigušenja čitavog sustava **C** s pomoću matrice prigušenja pojedinih elemenata, jer ih nije moguće iznaći, to **C** se određuje direktno za cijeli sustav na osnovi ukupne disipacije energije sustava u tijeku djelovanja pobude. Najčešće se primjenjuje Rayleighovo viskozno prigušenje, gdje se **C** izražava kao linearna kombinacija matrica **M** i **K** prema

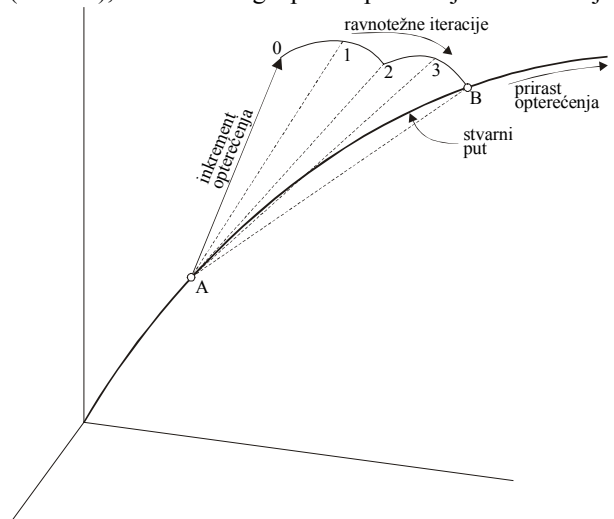
$$\mathbf{C} = \alpha_d \mathbf{M} + \beta_d \mathbf{K} \quad (23)$$

U navedenom izrazu α_d i β_d su konstante koje se određuju na osnovi koeficijenta prigušenja za bilo koja dva uzastopna nezavisna moda slobodnih oscilacija sustava.

Matrica prigušenja **C** uvedena je u kontekstu primjene linearnih elastičnih analiza, radi obuhvaćanja prigušenja oscilacija zbog pojave nelinearnosti (disipacije energije) sustava. Pri provedbi nelinearnih dinamičkih analiza s modelima materijala koji uključuju unutrašnju disipaciju energije, **C** bi trebala obuhvatiti samo onaj dio disipacije energije (prigušenja) koji nije obuhvaćen modelima materijala. Stoga ostaje otvoreno pitanje koliko treba uključiti viskozno Rayleighovo prigušenje pri uključenu nelinearnih modela materijala.

1.6 Veličina inkrementa opterećenja kod statičkih analiza

Kako numerički rezultati ovise o tzv. putu opterećivanja (slika 1.), te da bi mogli pratiti ponašanje konstrukcije



Slika 1. Grafički prikaz ovisnosti rješenja o tzv. putu opterećivanja

od niskih razina opterećenja pa sve do sloma, potrebno je vanjsko opterećenje podijeliti u više manjih inkremenata koji se nanose sukcesivno.

Veličina inkrementa opterećenja ne bi trebala premašiti vrijednost od oko 20-50% opterećenja koje izaziva prve pukotine [11]. Pri slabo armiranim konstrukcijama, treba redovito uzeti manje inkremente opterećenja na početku opterećivanja.

Kad se konstrukcija približava graničnoj nosivosti/slomu, potrebno je sukcesivno smanjivati veličinu inkrementa, odnosno veličina inkremenata pred slom konstrukcije mora biti vrlo mala.

Provedena su istraživanja utjecaja veličine inkrementa na dobivene rezultate u riješenim primjerima. Za uporabna stanja naprežanja konstrukcije nije uočen veći utjecaj veličine inkrementa opterećenja na dobivene rezultate (naprežanja i stanje pukotina), dok je za određivanje granične nosivosti konstrukcije bitno da inkrementi opterećenja pred slom budu dovoljno mali.

1.7 Algoritam rješenja

Primijenjena je inkrementalno-iterativna metoda Newton-Raphson. Matrica krutosti može se proračunavati u zahtijevanoj iteraciji, zahtijevanog inkrementa opterećenja (vremenskog inkrementa). S fizikalne točke gledišta, matricu krutosti povoljno je preračunavati pri značajnijim promjenama krutosti konstrukcije (pri nanošenju većih inkremenata opterećenja, pri pojavi pukotina i pred slom). Međutim, i dalje ostaje otvoreno pitanje, koje ovisi o pojedinom problemu, je li sa stajališta utroška proračunskog vremena za većinu praktičnih problema optimalno

- češće ažurirati (preračunavati) matricu krutosti smanjujući broj iteracija unutar pojedinog inkrementa opterećenja (vremenskog inkrementa), ili
- matricu krutosti preračunavati rjeđe (ili pak računati s matricom početne krutosti), uz povećani broj iteracija unutar pojedinog inkrementa opterećenja (vremenskog inkrementa).

U određenim slučajevima rješenje neće biti moguće bez ažuriranja matrice krutosti.

Kod problema s visokim utjecajem geometrijske nelinearnosti, Newton-Raphsonova metoda može biti beskorisna. Provedena ograničena istraživanja na riješenim primjerima pokazala su da trajanje analize značajnije ne ovisi o izboru pojedine sheme Newton-Raphson.

1.8 Kriterij konvergencije

Za kontrolu konvergencije postupka obično se rabi kriterij neuravnoteženih čvornih sila ili kriterij prirasta pomaka. U analizi armiranobetonskih konstrukcija kriterij

neuravnoteženih sila nije prikladan jer neuravnotežene sile mogu formirati "ravnotežne grupe" [6] koje značajno ne utječu na ukupni odgovor konstrukcije. Stoga je pogodniji kriterij konvergencije preko prirasta pomaka. Pritom je prikladno odvojeno kontrolirati priraste translacija od prirasta rotacija.

Tablica 2. Dijagram toka programa DALJ.

Poziv rutine koja učitava ulazne podatke o geometriji i karakteristikama materijala	1
Poziv rutine učitava podatke vezane za vremensku integraciju	2
Poziv rutine koja izračunava D matricu ili D_{ep} matricu elasto-plastičnih anizotropnih parametara	3
Poziv rutine koja formira debljinu i lokalni ortogonalni koordinatni sustav u svakoj čvornoj točki	4
Poziv rutine koja izračunava usvojenu B matricu i sprema podatke u memoriju	5
Poziv rutine koja učitava podatke o prethodnim čvornim silama, brzinama i ubrzanjima	6
Poziv rutine koja izračunava prethodne čvorne sile, brzine i ubrzanja	7
Poziv rutine koja učitava podatke o tekućem opterećenju	8
Poziv rutine koja izračunava konzistentnu ili dijagonalnu matricu masa M	9
Poziv rutine koja uvrštava rubne uvjete u solver	10
Početak petlje za svaki vremenski inkrement opterećenja	11
Poziv rutine koja izračunava podatke za tekući inkrement	12
Početak petlje za svaku iteraciju	13
Poziv rutine za odabir algoritma rješenja	14
Poziv rutine za izračunavanje matrice efektivne krutosti K_r* (ako je potrebno)	15
Poziv rutine za iterativno rješavanje jednadžbe s faktorizacijom matrice efektivne krutosti, ako je potrebno	16
Poziv rutine za izračunavanje rezidualnih sila	17
Poziv rutine za provjeru konvergencije	18
Provjera konvergencije DA NE	
Idi na korak 21	19
Idi na slijedeću iteraciju	20
Poziv rutine za ispis rješenja	21

preostala dva ruba slobodna. Geometrija ljsuske, podaci o armaturi i diskretizacija konačnim elementima prikazani su na slici 2. Detaljniji podaci o geometriji i armaturi mogu se naći u [20]. Promatrana je samo četvrtina ljsuske zbog simetrije problema. Ljsuska je po visini simulirana s 8 lamela betona. Armatura nejednoliko raspoređena, s većom koncentracijom uzduž slobodnog ruba. Ljsuska je proračunata kao slobodno oslonjena na mjestu dijafragme, sa slobodnim pomakom u smjeru osi x i kutom zaokreta oko osi y . Usvojeni parametri materijala za numeričku analizu prikazani su u tablicama 3., 4. i 5. Opterećenje ljsuske zadano je s pomoću odnosa promatranog opterećenja (P) i projektnog opterećenja ($P_{pr} = 0,358 \text{ N/cm}^2$). Neki rezultati proračuna prikazani su na slikama 3.do 6.

Tablica 3. Parametri materijala za Primjer 1

BETON		
Parametar	Vrijednost	
Modul elastičnosti	$E_c = 2069 \text{ kN/cm}^2$	
Poissonov koeficijent	$\nu = 0.145$	
Granična tlačna čvrstoća	$f'_c = 3.02 \text{ kN/cm}^2$	
Granična vlačna čvrstoća	$f'_t = 0.48 \text{ kN/cm}^2$	
Deformacija drobljenja	$\varepsilon_{cu} = 0.0035$	
Parametri vlačne krutosti	$\varepsilon_m = 0.5$	
	$\varepsilon_{ts} = 0.002$	
Parametar posmične krutosti	$\varepsilon_{sh} = 0.002$	
ČELIK		
Parametar	Vrijednost	
Modul elastičnosti	$E_a = 20000 \text{ kN/cm}^2$	
Parametar ojačanja	$H' = 4000 \text{ kN/cm}^2$	
Granična deformacija	0.01	
#3	Granica tečenja	$\sigma_y = 25.29 \text{ kN/cm}^2$
	Granična čvrstoća	$f_a = 36.42 \text{ kN/cm}^2$
#4	Granica tečenja	$\sigma_y = 21.91 \text{ kN/cm}^2$
	Granična čvrstoća	$f_a = 34.49 \text{ kN/cm}^2$
#9	Granica tečenja	$\sigma_y = 30.66 \text{ kN/cm}^2$
	Granična čvrstoća	$f_a = 42.00 \text{ kN/cm}^2$

Iz slika se vidi je da se numerički rezultati dobiveni programom DALJ gotovo podudaraju s eksperimentalnim rezultatima [20] te numeričkim rezultatima Figueirasa [11]. Valja pritom napomenuti da je ovdje izloženi model sličan modelu Figueirasa, s poboljšanjima koja se odnose na:

- uključenje preciznijeg i efikasnijeg elementa degenerirane ljsuske oslobođenog efekata posmičnog i membranskog *lockinga*

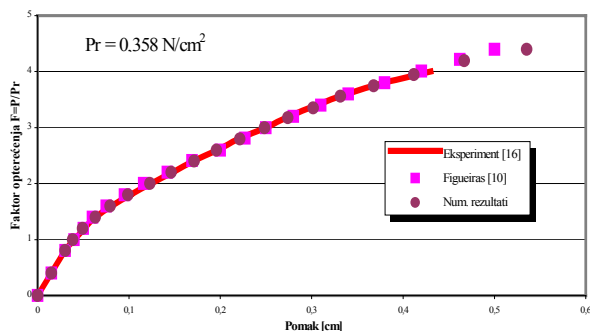
- adekvatniju simulaciju vlačne krutosti puknutog betona
- adekvatniju simulaciju posmične krutosti puknutog betona.

Tablica 4. Ulazni podaci za armaturu

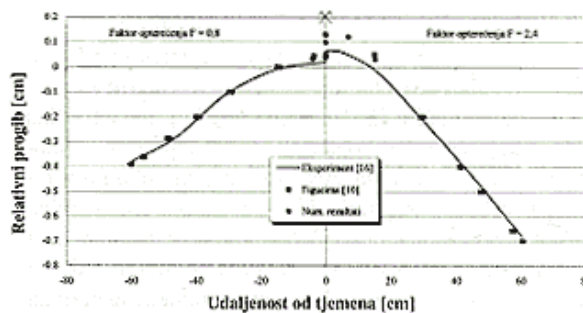
RB	Tip	Površina (norm.)	Udaljenost (norm.)	Kut
1	#3	4.83E-03	-5.00E-01	0
2	#3	6.91E-03	-6.42E-01	0
3	#4	6.02E-03	-7.95E-01	0
4	#9	3.00E-02	-4.78E-01	0
5	#9	2.85E-02	-4.78E-01	0
6	#9	1.90E-02	-4.78E-01	0
7	#3	4.83E-03	2.80E-01	0
8	#3	3.50E-03	5.05E-01	0
9	#3	2.50E-03	6.25E-01	0
10	#9	2.96E-02	4.78E-01	0
11	#9	2.85E-02	4.78E-01	0
12	#9	1.90E-02	4.78E-01	0
13	#3	5.52E-06	-3.08E-01	90
14	#3	4.82E-06	-3.08E-01	90
15	#3	5.80E-06	-3.08E-01	90
16	#3	1.10E-05	-3.08E-01	90
17	#3	9.64E-06	-3.08E-01	90
18	#3	1.58E-05	-3.08E-01	90
19	#3	8.60E-06	-5.20E-01	90
20	#3	7.21E-06	-5.20E-01	90
21	#3	4.40E-06	-5.20E-01	90
22	#3	5.74E-06	-6.42E-01	90
23	#3	5.02E-06	-6.42E-01	90
24	#3	3.02E-06	-6.42E-01	90
25	#4	1.84E-02	5.00E-01	90
26	#4	1.61E-02	5.00E-01	90
27	#4	6.20E-03	5.00E-01	90
28	#4	9.20E-03	5.00E-01	90
29	#4	8.05E-03	5.00E-01	90
30	#4	7.20E-03	5.00E-01	90
31	#4	1.40E-02	5.00E-01	90
32	#4	1.23E-02	5.00E-01	90
33	#4	1.10E-02	5.00E-01	90
34	#4	1.05E-02	6.00E-01	90
35	#4	9.20E-03	6.00E-01	90
36	#4	8.20E-03	6.00E-01	90
37	#4	6.80E-03	7.40E-01	90
38	#4	6.00E-03	7.40E-01	90
39	#4	5.40E-03	7.40E-01	90
40	#4	5.11E-03	0.00E+00	45
41	#4	1.21E-02	0.00E+00	45
42	#4	4.20E-03	0.00E+00	45
43	#4	6.30E-03	0.00E+00	45
44	#4	4.20E-03	0.00E+00	45
45	#4	6.30E-03	0.00E+00	45

Tablica 5. Raspored armature po elementima

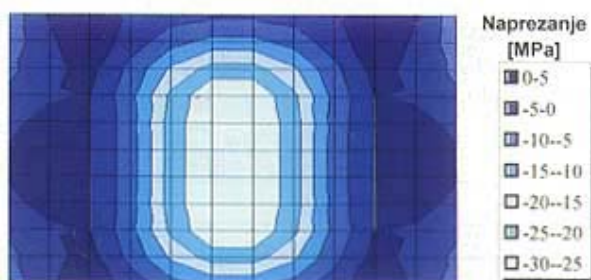
Element	Tipovi armature						
1	1		7		13	25	
2	1		7		13	25	
3	1		7		13	25	
4	1		7		14	26	
5	1		7		15	27	
6	1		7		15	27	
7	1		7		13	25	
8	1		7		13	25	
9	1		7		13	25	
10	1		7		14	26	
11	1		7		15	27	
12	1		7		15	27	
13	1		7		13	28	
14	1		7		13	28	
15	1		7		13	28	
16	1		7		14	29	
17	1		7		15	30	
18	1		7		15	30	
19	1		7		16	31	
20	2		8		16	31	
21	2		8		16	31	40
22	2		8		17	32	40
23	2		8		18	33	41
24	2		8		18	33	41
25	2		8		19	34	
26	2		8		19	34	42
27	2		8		19	34	42
28	2		8		20	35	42
29	2		8		21	36	43
30	2		8		21	36	43
31	3	4	9	10	22	37	44
32	3	4	9	10	22	37	44
33	3	5	9	11	22	37	44
34	3	5	9	11	23	38	44
35	3	6	9	12	24	39	45
36	3	6	9	12	24	39	45



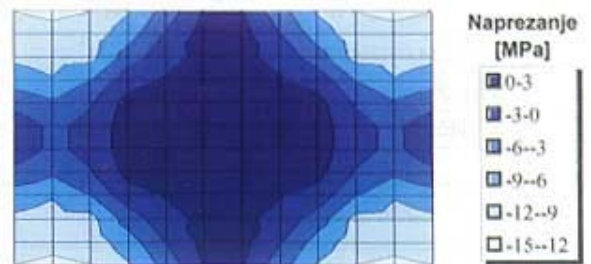
Slika 3. Progibi u sredini slobodnog ruba ljsuske



Slika 4. Progibi u sredini raspona ljsuske



Slika 5. Granična naprezanja betona: donje lamele, smjer x



Slika 6. Granična naprezanja betona: gornje lamele, smjer x

3.2 Primjer 2.

Armiranobetonski tornjevi za hlađenje u sklopu postrojenja nuklearnih elektrana pripadaju najvećim ikad izgrađenim građevinama. Kako ove građevine nije moguće ispitati eksperimentalno, za određivanje njihove sigurnosti obično se koriste samo numeričke analize.

U ovom je primjeru analiziran armiranobetonski rashladni toranj Port Gibson, nuklearne elektrane Grand Gulf, SAD [1, 18]. Ovaj je toranj analiziran više puta za utjecaj kvazistatičkih opterećenja, s različitim numeričkim modelima (neki rezultati se mogu pronaći u radovima [17, 18, 31, 34, 35]).

3.2.1 Geometrija tornja

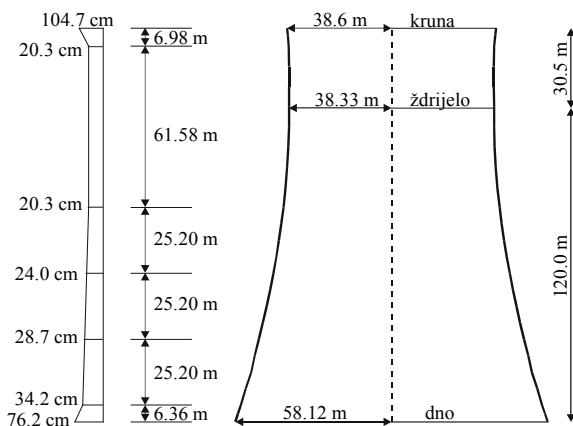
Osnovne geometrijske karakteristike tornja, preuzete iz [18], prikazane su na slici 7.

Geometrija tornja iznad ždrijela opisana je hiperbolom oblika

$$-0,002610z^2 - 0,098937rz + r^2 + 1,4174z - 36,7642r + 1278,6678 = 0 \quad (24)$$

a ispod ždrijela hiperbolom oblika

$$0,86020z^2 + 1,4208rz + r^2 - 51,7196z - 494,4638r + 16674,1904 = 0 \quad (25)$$

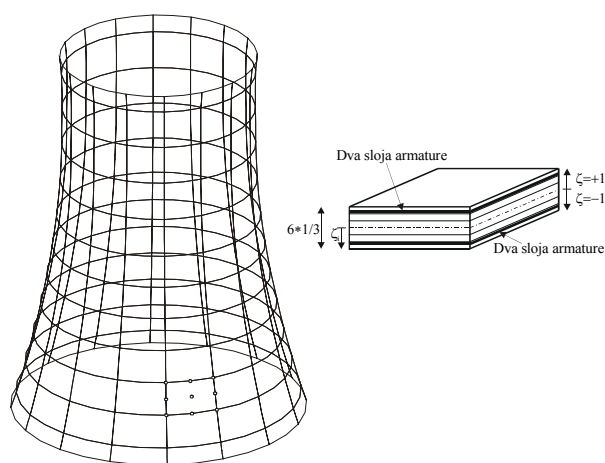


Slika 7. Osnovna geometrija tornja za hlađenje Port Gibson

gdje z označava visinu mjerenu od ždrijela, a r radijus tornja (izraženi u metrima). Na slici 7. definirana je promjena debljine stijenke po visini tornja. Toranj je armiran horizontalnom i vertikalnom armaturom, uz unutrašnju i vanjsku stranu stijenke.

3.2.2 Numerički model

Usvojena prostorna diskretizacija tornja prikazana je na slici 8. Primijenjena je prilično gruba mreža 9-čvornih elemenata (samo 16 elemenata u smjeru paralela i 12 elemenata u smjeru meridijana). Svaki se element sastoji od 6 slojeva betona i 4 sloja armature. Usvojeni parametri betona i čelika prikazani su u tablici 6. Položaj armaturnih šipki (relativni položaj usvojenih lamela armature prikazan je u tablici 7. Računano je da je toranj u bazi upet u temelj. Osim materijalne nelinearnosti, uključen je utjecaj i promjene geometrije tornja.



Slika 8. Prostorna diskretizacija tornja

Tablica 7. Položaj slojeva armature

Visina od ždrijela [m]	Debljina tornja [cm]	Pozicija šipke [ζ_i]
30.50	101.7	± 0.820
23.32	20.3	± 0.820
-7.26	20.3	± 0.532
-22.65	20.3	± 0.532
-38.04	20.3	± 0.500
-63.24	24.0	± 0.529
-88.44	28.7	± 0.590
-113.64	34.2	± 0.678
-120.00	76.2	± 0.812

3.2.3 Statička analiza tornja

Toranj je analiziran za opterećenje vlastitom težinom i horizontalnim opterećenjem vjetrom kao kvazistatičkim opterećenjem. Podaci o vjetrovnom opterećenju preuzeti su iz [31, 18]. Razdioba vjetrovnog opterećenja po pojedinoj paraleli (razdioba tlaka po opsegu) iskazana je formulom

$$H_a = -0,5 + \sum_{n=0}^{12} A_n \cos n\theta \quad (26)$$

gdje su A_n amplitude prikazane u tablici 8, a θ promatrani kut u horizontalnoj ravnini.

Tablica 8. Amplitude vjetrovnog opterećenja

n	A_n	n	A_n	n	A_n	n	A_n
0	0,38330	3	-0,50927	6	0,03333	9	-0,00972
1	-0,27918	4	-0,09167	7	-0,04474	10	-0,01356
2	-0,61978	5	0,11794	8	-0,00833	11	-0,00597
						12	-0,01667

Razdioba opterećenja vjetrom u smjeru meridijana dana je sljedećim izrazom

$$p (N/m^2) = 413,013 H_a (3,281z + 393,696)^{2/7} \quad (27)$$

gdje je z (m) udaljenost od dna tornja.

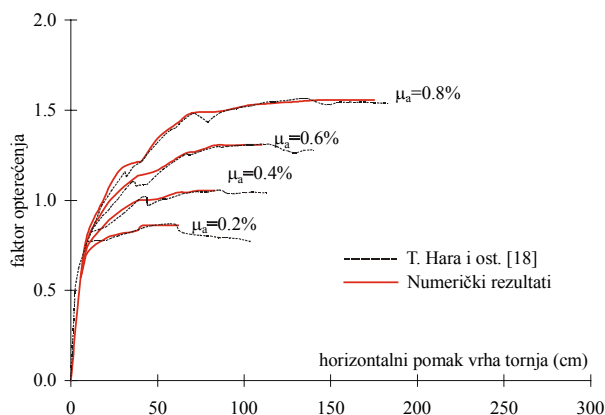
Ukupno opterećenje na toranj može se iskazati kao

$$q_u = q_g + \chi q_v \quad (28)$$

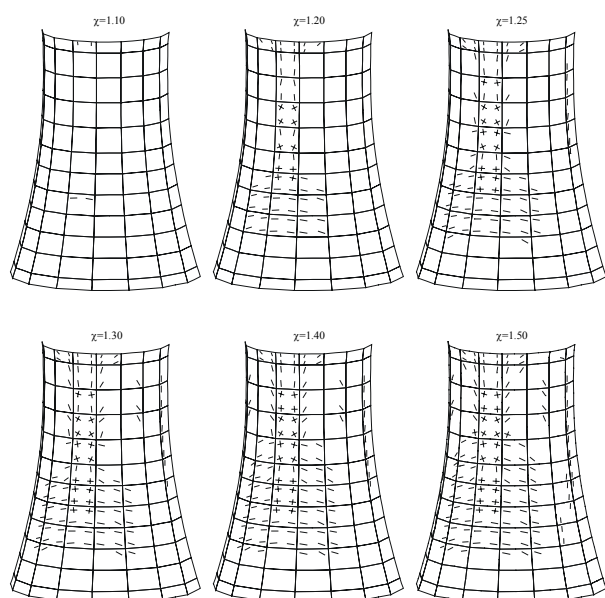
gdje je q_u ukupno opterećenje, q_g gravitacijsko opterećenje; q_v vjetrovno opterećenje, a χ faktor opterećenja.

Toranj je analiziran za različite postotke armiranja η_a (0,2%, 0,4%, 0,6% i 0,8%) i različite faktore opterećenja χ . Neki dobiveni rezultati prikazani su na slikama 9. do 11.

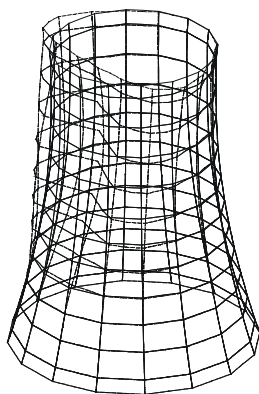
Slika 9. prikazuje utjecaj postotka armiranja na graničnu nosivost tornja. Dan je odnos horizontalnog pomaka vrha i faktora opterećenja u ovisnosti o postotku armiranja.



Slika 9. Utjecaj postotka armiranja na graničnu nosivost tornja



Slika 10. Stanje pukotina u vanjskoj plohi tornja za postotak armiranja $\mu_a=0,8\%$

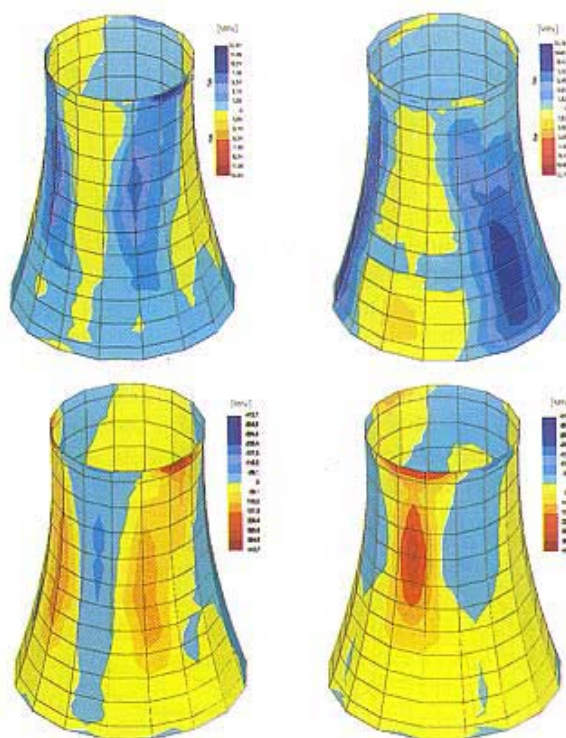


Slika 11. Pomaci tornja za postotak armiranja $\mu_a = 0,8\%$ i faktor opterećenja $\chi = 1,50$

Vidi se da granična nosivost tornja značajno ovisi o postotku armature. Također se vidi da je ponašanje tornja praktički linearno sve do $\chi = 0,7$. Nakon toga, pojavljuje se nelinearno ponašanje zbog pojave pukotina u betonu i pada krutosti. S porastom opterećenja dolazi do širenja pukotina i daljeg pada krutosti. Na slici 10. prikazano je stanje pukotina u vanjskom sloju betona za $\mu_a = 0,8\%$ i različite faktore opterećenja χ . Prikaz pomaka konstrukcije za $\eta_a = 0,8\%$ i $\chi = 1,5$ dan je na slici 11.

Horizontalna naprezanja (σ_{xx}) u unutrašnjem sloju betona za $\mu_a = 0,8\%$ i $\chi = 1,5$ prikazana su na slici 12.a, a pripadajuća vertikalna (σ_{yy}) na slici 12.b. Naprezanja horizontalne armature uz vanjsku stranu presjeka ljsuske za $\mu_a = 0,8\%$ i $\chi = 1,5$ prikazana su na slici 12.c., a pripadajuća naprezanja vertikalne armature uz vanjsku stranu na slici 12.d.

Uspoređujući dobivene rezultate pomaka i granične nosivosti s onima prezentiranim u [18], može se uočiti njihova velika podudarnost.

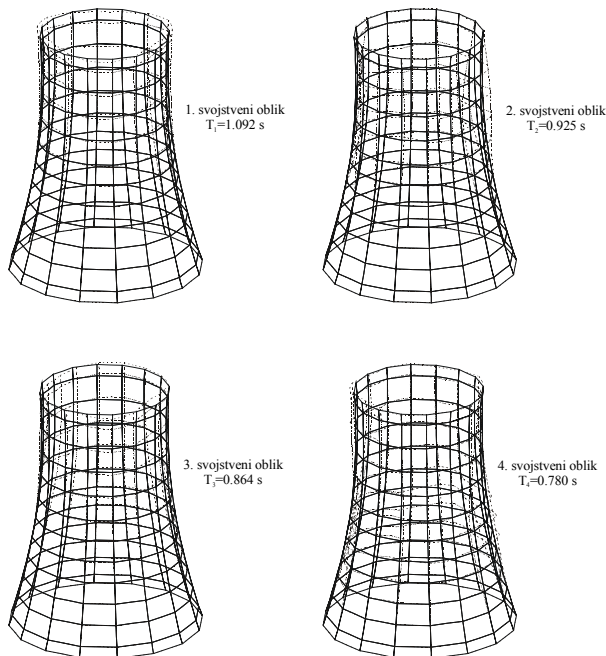


Slika 12. a) Horizontalna (σ_{xx}) naprezanja unutrašnje plohe tornja za postotak armiranja $\mu_a = 0,8\%$ i faktor opterećenja $\chi = 1,5$; b) Vertikalna (σ_{yy}) naprezanja unutrašnje plohe tornja za postotak armiranja $\mu_a = 0,8\%$ i faktor opterećenja $\chi = 1,5$; c) Naprezanja horizontalne armature uz vanjsku plohu tornja za postotak armiranja $\mu_a = 0,8\%$ i faktor opterećenja $\chi = 1,5$; d) Naprezanja vertikalne armature uz vanjsku plohu tornja za postotak armiranja $\mu_a = 0,8\%$ i faktor opterećenja $\chi = 1,5$

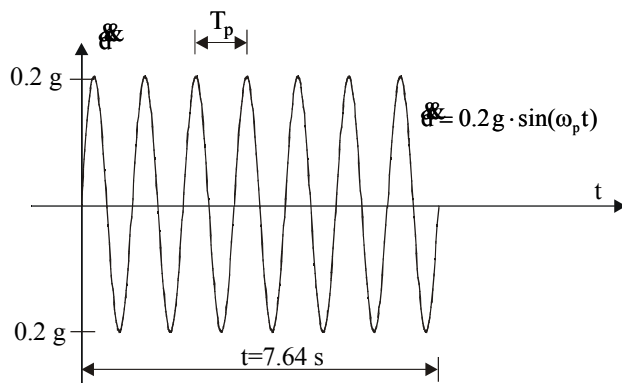
3.2.4 Dinamička analiza tornja

Analiziran je toranj s $\mu_a = 0,8\%$. Izračunane dinamičke karakteristike tornja za prva četiri oblika slobodnih oscilacija prikazane su na slici 13.

Usvojeno je horizontalno harmonijsko ubrzanje podloge (slika 14.) radi jednostavne kvalitativne kontrole rezultata. Maksimalna amplituda ubrzanja podloge uzeta je 0,2 g. Frekvencija (period) pobude jednaka je frekvenciji (periodu) prvog svojstvenog oblika slobodnih oscilacija. Duljina vremenskog inkrementa uzeta je $\Delta t = 0,01$ s ($\approx T_1/100$). Upotrijebljena je dijagonalna matrica masa. Usvojeno je 5% Rayleighova konstrukcijskog prigušenja. Nije uključen utjecaj brzine deformacije na mehaničke karakteristike betona i čelika. Toranj je najprije analiziran s linearno-elastičnim modelom materijala, a potom s opisanim nelinearnim modelom betona i armature.

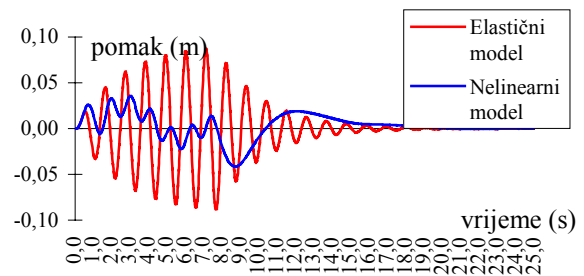


Slika 13. Dinamičke karakteristike tornja



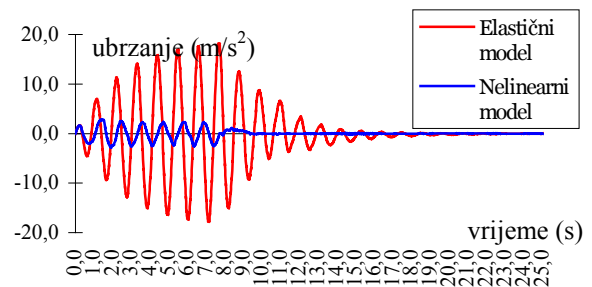
Slika 14. Harmonijsko ubrzanje podloge

Horizontalni pomak vrha tornja prikazan je na slici 15. Za elastični model materijala uočljiva je pojava rezonancije, što se očekivalo. Za nelinearni model materijala već se u početku pojavljuju značajne pukotine u betonu, što dovodi do pada krutosti i unutrašnjeg prigušenja. Konačno stanje pukotina na vanjskoj i unutrašnjoj plohi prikazano je na slici 17. Tečenje betona i armature registrirano je u više ‘gauss’ točaka. Uočljivo je da pojava pukotina potpuno mijenja odgovor sustava na dinamičku pobudu. Nakon prestanka djelovanja pobude, titranje tornja se brzo smiruje.

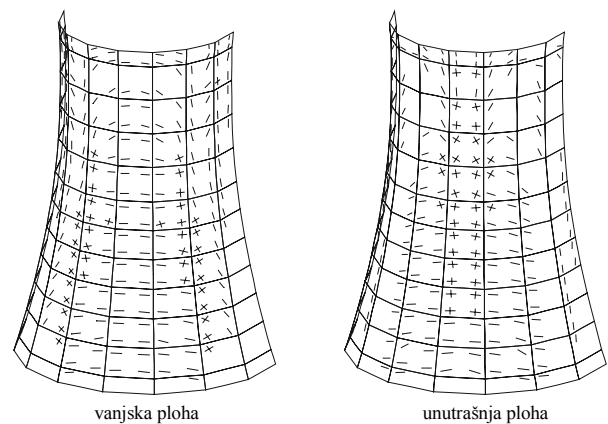


Slika 15. Horizontalni pomak vrha tornja

Horizontalno ubrzanje krune tornja prikazano je na slici 16. Vidi se da su slike 15 i 16 sličnog oblika, te se za ubrzanje tornja mogu izvesti analogni zaključci kao i za pomake.



Slika 16. Ubrzanje vrha tornja



Slika 17. Konačno stanje pukotina na vanjskoj i unutrašnjoj plohi tornja

4 Zaključak

Izloženi model za statičku i dinamičku analizu betonskih ljusaka uključuje dominantne materijalno i geometrijski nelinearne efekte ponašanja ovih konstrukcija.

Model se temelji na osnovnim parametrima betona i armature, a ponajprije je namijenjen praktičnim inženjerskim primjenama. Neki riješeni primjeri pokazuju zavidnu točnost i pouzdanost izloženog modela i razvijeno proračunskog programa DALJ.

LITERATURA

- [1] ACI-ACSE Committee 334: *Reinforced concrete cooling tower shell - practice and commentary*, ACI Journal. (1984.), Vol. 81, pp. 623-631
- [2] Ahmad, S.: *Curved finite elements in the analysis of solid shell and plate*, Ph.D. Thesis, University College of Swansea, C/PH/7/69, 1969.
- [3] Ahmad, S.; Iron, B.M.; Zienkiewicz, O.C.: *Analysis of thick and shell structures by curved finite elements*, Intl. J. Numer. Meth. Engng. (1970) 2, 419-451.
- [4] Bathe, K.J.; Dvorkin, E.N.: *A four-node plate bending element based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation*, Intl. J. Numer. Meth. Engng. (1985) 21, 367-383.
- [5] Belytschko, T.; Ong, J.S.J.; Liu, W.K.: *A consistent control of spurious single modes in the 9-node Lagrange element for the Laplace and Mindlin plate equations*, Comp. Meth. App. Mech. Engng. (1984) 44, 269-295.
- [6] Bergan, P. G.; Holand, I.: *Nonlinear finite element analysis of concrete structures*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18, (1979), 443-467.
- [7] Cedolin, L.; Crutzen, Y.R.J.; Deipoli, S.: *Triaxial stress-strain relationship for concrete*, ASCE J. of the Eng. Mech. Div. Vol. 103, No. EM3, (1977), 423-439.
- [8] Duddeck, H.; Griebenow, G.; Shaper, G.: *Material And Time Dependent Nonlinear Behaviour Of Cracked Reinforced Concrete Slabs; In Nonlinear Behaviour Of Reinforced Concrete Spatial Structures*, Vol.1., Preliminary Report IASS Symposium held in Darmstadt, Eds. Mehlhorn, G.; Ruhle H.; Zerna, W., Werner-Verlag Dusseldorf, (1978), 101-113.
- [9] Dvorkin, E.N.; Bathe, K.J.: *A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis*, Engng. Comp. (1984) 1:77-88.
- [10] Figueiras, J.A.: *Ultimate load analysis of anisotropic and reinforced concrete plates and shells*, Ph.D. Thesis, University College of Swansea, C/Ph/72/83, 1983.
- [11] Figueiras, J.A.; Owen, D.R.J.: *Analysis Of Elasto-Plastic And Geometrically Non-Linear Anisotropic Plates And Shell In Finite Element Software For Plates And Shells*, Hinton, E.; Owen, D.R.J. (Eds.), Pineridge Press, 1984.
- [12] Fried, I.: *Residual energy balancing technique in the generation of plate bending element*. Comp. Struct. (1974) 4, 771-778.
- [13] Fried, I.: *Shear in C(0) and C(1) bending finite elements*, J. Solids Struct. (1973) 9, 449-460.
- [14] Fried, I.: *Triangular nine-degrees-of-freedom, C(0) plate bending element of quadratic accuracy*, Q. Appl. Mech. (1973) 31, 303-312.
- [15] Gilbert, R.I.; Warner, R.F.: *Tension stiffening in reinforced concrete slabs*, ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 104, No.ST12, (1978), 1885-1900.
- [16] Hand, F.R.; Pecknold, D.A.; Schnobrich, W.C.: *Nonlinear layered analysis of RC plates and shells*, ASCE Journal of the Structural Division Vol.99, No.ST7, (1973), 1491-1505.
- [17] Hara T.; Kato S.; Nakamura H.: *Reinforced Concrete Cooling Tower Shells - practice and commentary*, ACI Journal (1994.), Vol. 81, pp. 623-631
- [18] Hara T.; Kato S.; Ohya M.: *Nonlinear behavior of R/C cooling tower shells*, Struct. Engin. and Mech. (1997.), Vol. 5, No. 5, pp. 541-552
- [19] Harapin A.: *Numerička simulacija dinamičkog međudjelovanja tekućine i konstrukcije* Disertacija, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 2000.
- [20] Hedgren, A.W.; Billington, D.P.: *Mortar model test on a cylindrical shell of varying curvature and thickness*, ACI Journal, 1967.
- [21] Huang, H.C.; Hinton, E.: *A New Nine Node Degenerated Shell Element With Enhanced Membrane And Shear Interpolation*, Int. J. Num. Meth. Eng. (1986) 22, 73-92.
- [22] Huang, H.C.; Hinton, E.: *A nine node Lagrangian Mindlin plate element with enhanced shear interpolation*, Engng Comp (1984) 1, 369-379.
- [23] Huang, H.C.; Hinton, E.: *Elasto-Plastic And Geometrically Nonlinear Analysis Of Plates And Shells Using A New Nine Node Element*, In: Proceedings of symposium finite element methods for nonlinear problems, vol. 1, pp 3-1-3-15, Trondheim, Norway, 1985
- [24] Huang, H. C.: *Static and Dynamic Analysis of Plates and Shells*, Springer-Verlag, 1989.
- [25] Hughes, T.J.R.; Liu, W.K.: *Nonlinear finite element analysis of shells: Parts I and II: three dimensional and two dimensional shells*, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng. 26, 331-362, 1981 27, 167-181.
- [26] Hughes T.J.R.; Liu W.K.: *Implicit-explicit finite elements in transient analysis: stability theory*, Jour. of Apl. Mech. (1978.), Vol. 45, pp. 371-374
- [27] Hughes, T.J.R.; Tezduyar, T.E.: *Finite elements based upon Mindlin plate theory with particular reference to the four-node bilinear isoparametric element*, Trans. ASME E.: J. Appl. Mech. (1981) 48, 587-596.
- [28] Hughes T.J.R.; Pister K.S.; Taylor R.L.: *Implicit-explicit finite elements in nonlinear transient analysis*, Comp. Meth. Apl. Mech. Engng. (1979.), Vol. 17/18, pp. 159-182
- [29] Lin, C.S.; Scordelis, A.C.: *Nonlinear analysis of RC shells of general form*, ASCE Journal of the Structural Division, Vol. 101, No.ST3, (1975), 523-538.
- [30] Kupfer, H.B.; Gerstle, K.H.: *Behaviour of concrete under biaxial stresses*, ASCE Journal of the Eng. Mech. Div., Vol. 99, No. EM4, (1973), 853-866

- [31] Mang H.A.; Flöegl H.: *Wind-load reinforced concrete cooling towers: buckling or ultimate load?*, Eng. Struct. (1983.), Vol. 5, pp. 163-180
- [32] Matešan, D.: *Nelinearna analiza betonskih ljustki*, Magistarski rad, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 2000.
- [33] Mišanović A.: *Dinamika konstrukcija*, Građevinski fakultet Sveučilišta u Splitu, Split, 1995.
- [34] Milford R.V.: *Nonlinear behavior of reinforced concrete cooling towers*, Ph. D. Thesis, University of Illinois, USA, 1984.
- [35] Min C.S.; Gupta A.K.: *A study of inelastic behavior of reinforced concrete shell using supercomputers*, Reinforced Concrete Shell Research Report (1984.), North Carolina State University, USA
- [36] Mindlin, R.D.: *Influence of rotatory inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates*, J. Appl. Mech. (1951) 18, 1031-1036.
- [37] Radnić, J.: *Statičke i dinamičke analize betonskih gravitacijskih brana*, Građevinar 45 (1993), 2.
- [38] Radnić J.: *Modelling of strain rate effects in dynamic analysis of R/C structures*, Engineering Mod. (1990.), Vol. 3, No. 1-2, pp. 13-20
- [39] Radnić, J.; Damjanić, F.: *Numerički model za statičku i dinamičku analizu armiranobetonskih konstrukcija*, Izgradnja (1989) 10, 5-14.
- [40] Radnić, J.; Matešan, D.; Harapin, A.: *Model for Static Analyses of Concrete Shell*, Engineering Modelling (2000) (u tisku)
- [41] Reissner, E.: *The effect of transverse shear deformation on bending of elastic plate*, J. Appl. Mech. (1945) 12, 69-76.
- [42] Timoshenko, S.P.; Woinowsky-Krieger S.: *Theory of plates and shells*, 2nd edn., McGraw-Hill, New York, 1961.
- [43] Yuan M.; Chen P.; Xiong S.; Li Y.; Wilson E.L.: *The WYD method in large eigenvalue problems*, Eng. Comp. (1989.), Vol. 6, pp. 49-57